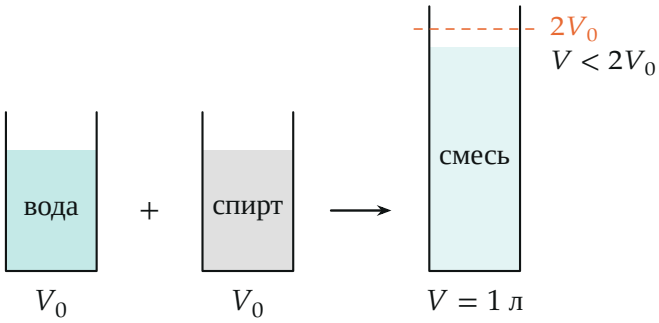
Смесь воды и спирта

Задача 3. [ИОШ 2021/22, 9 класс, задача 3] Известно, что при приготовлении смеси некоторых жидкостей объем смеси не равен сумме объемов отдельных компонент. В частности, при смешивании воды и спирта объем смеси меньше суммы объемов воды и спирта. Смешали два одинаковых объема воды и спирта так, что получился 1 литр смеси, который весит 936 г. При этом 1 литр чистого спирта весит 729 г, а 1 литр чистой воды — 1 кг. Какие массы воды и спирта смешали?



Поясняющий рисунок: два равных объёма V_0 воды и спирта дают смесь объёмом $V = 1$ л — меньше, чем $2V_0$ (пунктир).

▲ **Решение. Что происходит.** Массы при смешивании складываются всегда, а объёмы — нет: молекулы спирта и воды «упаковываются» плотнее. Поэтому уравнение «объём смеси = сумма объёмов» писать нельзя, а уравнение для масс — можно. Второе уравнение даёт равенство исходных объёмов: при одинаковом объёме массы относятся как плотности. Это задача на плотность и массу смеси.

Обозначения. $M = 936$ г — масса смеси; $M_в$, $M_{сп}$ — массы воды и спирта; V_0 — объём каждой из компонент до смешивания; $\rho_в = 1000$ г/л, $\rho_{сп} = 729$ г/л — плотности (масса литра, данная в условии).

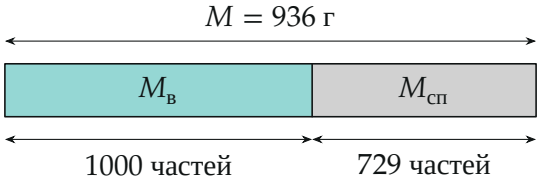
1. Плотности из условия. «Литр весит» означает массу литра, то есть плотность: $\rho_в = 1$ кг/л, $\rho_{сп} = 0{,}729$ кг/л, у смеси $\rho_{см} = 0{,}936$ кг/л. Масса связана с объёмом формулой $m = \rho V$.

2. Два уравнения. Закон сохранения массы при смешивании:

$$M_в + M_{сп} = M.$$

Объёмы компонент равны, $V_0 = M_в/\rho_в = M_{сп}/\rho_{сп}$, поэтому

$$\frac{M_в}{M_{сп}} = \frac{\rho_в}{\rho_{сп}}.$$



Масса смеси делится между водой и спиртом в отношении плотностей 1000 : 729, *потому что объёмы компонент равны.*

3. Массы компонент. Подставим $M_в = M_{сп}\rho_в/\rho_{сп}$ в закон сохранения массы:

$$M_{сп}\left(\frac{\rho_в}{\rho_{сп}} + 1\right) = M \quad \Rightarrow \quad M_{сп} = \frac{\rho_{сп}}{\rho_в + \rho_{сп}} M, \qquad M_в = \frac{\rho_в}{\rho_в + \rho_{сп}} M.$$

Числа:

$$M_{сп} = \frac{729}{1729} \cdot 936\ г \approx 395\ г, \qquad M_в = \frac{1000}{1729} \cdot 936\ г \approx 541\ г.$$

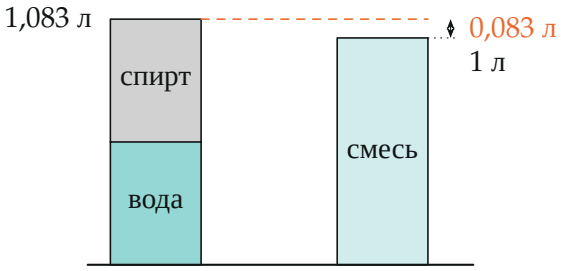
4. Насколько уменьшился объём. Объём каждой компоненты

$$V_0 = \frac{M_в}{\rho_в} = \frac{M}{\rho_в + \rho_{сп}} = \frac{936}{1729}\ л \approx 0{,}541\ л,$$

сумма объёмов $2V_0 \approx 1{,}083$ л, а смесь занимает $V = 1$ л. Относительное изменение объёма

$$\nu = \frac{V - 2V_0}{2V_0} = \frac{V(\rho_в + \rho_{сп})}{2M} - 1 = \frac{1729}{1872} - 1 \approx -0{,}076.$$

Минус означает, что объём уменьшился — примерно на 7,6 %, как и сказано в условии.

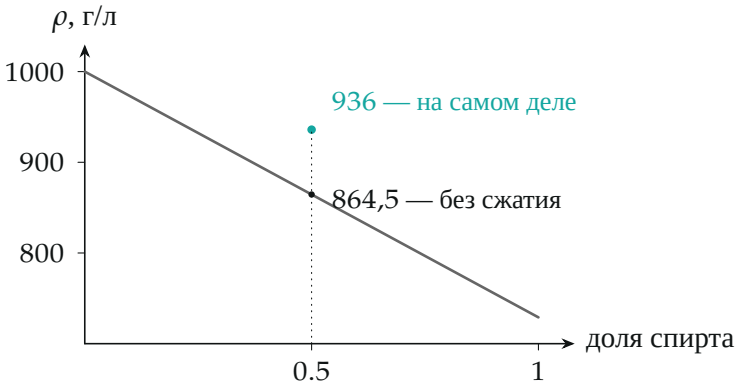


Объёмы до и после смешивания: сумма $2V_0 \approx 1{,}083$ л, смесь — 1 л; «пропало» 0,083 л, то есть 7,6 % от суммы.

Обратите внимание. Нельзя писать $M_в/\rho_в + M_{сп}/\rho_{сп} = 1$ л: именно это равенство при смешивании воды и спирта нарушается. Объём смеси в задаче нужен только для того, чтобы найти её массу.

Ответ. $M_в = \dfrac{\rho_в M}{\rho_в + \rho_{сп}} \approx 541$ г, $M_{сп} = \dfrac{\rho_{сп} M}{\rho_в + \rho_{сп}} \approx 395$ г.

Проверка. Сумма: $541 + 395 = 936$ г. Отношение $541/395 \approx 1{,}37 = 1000/729$. Объёмы: $541/1000 = 0{,}541$ л и $395/0{,}729 \approx 0{,}541$ л — равны. Предел: если бы плотности были одинаковы, массы поделились бы поровну — формула даёт $M/2$. Если бы объём сохранялся, при равных объёмах плотность смеси была бы средней $(1000 + 729)/2 = 864{,}5$ г/л, а она 936 г/л — больше, значит, объём действительно уменьшился.



Плотность смеси равных объёмов: без сжатия была бы на прямой (864,5 г/л), фактическая (936 г/л) выше — объём смеси меньше суммы объёмов.

Физический смысл. Масса сохраняется при любом смешивании, объём — нет; поэтому состав смеси находят по массам и плотностям чистых компонент.

Ответ. $M_{\text{в}} = \dfrac{\rho_{\text{в}} M}{\rho_{\text{в}} + \rho_{\text{сп}}} \approx 541$ г, $M_{\text{сп}} = \dfrac{\rho_{\text{сп}} M}{\rho_{\text{в}} + \rho_{\text{сп}}} \approx 395$ г (объём смеси меньше суммы объёмов на 7,6 %).