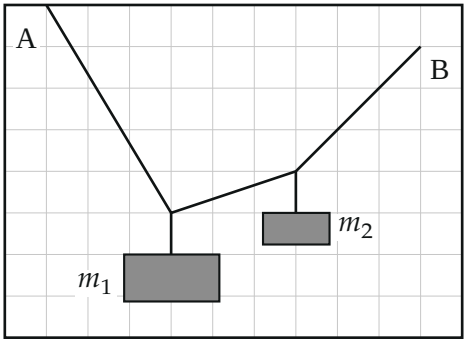
Верёвка с двумя грузами

Задача 4. [ИОШ 2021/22, 9 класс, задача 4] Концы невесомой веревки закреплены в точках A и B (см. рисунок). К веревке привязали два груза массами m_1 и m_2. По приведенному рисунку найти отношение масс грузов m_1/m_2.

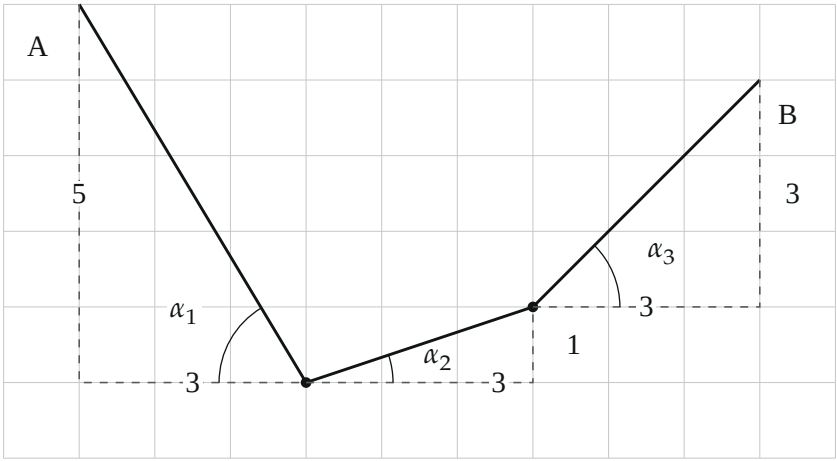


▲ **Решение.** **Что происходит.** Верёвка невесома, поэтому каждый её прямой участок натянут одинаково по всей длине, а узлы, к которым привязаны грузы, неподвижны. Участков три: от A до первого узла (T_1), между узлами (T_2) и от второго узла до B (T_3). Главная идея: груз висит на вертикальной нити, и эта нить действует на узел только по вертикали, поэтому горизонтальные составляющие натяжений по обе стороны узла равны — горизонтальная составляющая H одна и та же на всех трёх участках. Тогда вертикальная составляющая любого участка равна $H\,\mathrm{tg}\,\alpha$, а тангенс угла наклона прочитывается по клеточкам рисунка. Это задача на равновесие узлов: статика.

Обозначения. Ось x направим вправо, ось y вверх; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — углы, которые первый, второй и третий участки верёвки образуют с горизонталью. Зачем такие оси: нити грузов вертикальны, поэтому в проекции на x их силы равны нулю и в горизонтальные уравнения входят только натяжения верёвки.

1. Углы по клеточкам. Рисунок нарисован на клетчатой бумаге, и все узлы лежат в узлах сетки. Каждый из трёх участков занимает по горизонтали 3 клетки, а по вертикали: первый — 5 клеток (вверх влево

от первого узла к A), второй — 1 клетку (вверх вправо ко второму узлу), третий — 3 клетки (вверх вправо к B).



Клетки на рисунке организаторов: у каждого участка три клетки по горизонтали, по вертикали — 5, 1 и 3 клетки.

Отсюда

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{5}{3}, \qquad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{1}{3}, \qquad \operatorname{tg}\alpha_3 = \frac{3}{3} = 1.$$

2. Равновесие первого узла (на него действуют $\vec{T}_1$ вдоль участка к A, $\vec{T}_2$ вдоль участка ко второму узлу и сила натяжения нити груза, равная $m_1 g$ — груз неподвижен). Запишем второй закон Ньютона для узла при $a = 0$ в проекциях:

$$-T_1 \cos\alpha_1 + T_2 \cos\alpha_2 = 0, \qquad T_1 \sin\alpha_1 + T_2 \sin\alpha_2 - m_1 g = 0.$$

3. Равновесие второго узла. Участок между узлами тянет второй узел вдоль себя, то есть вниз влево, к первому узлу, под тем же углом α_2:

$$-T_2 \cos\alpha_2 + T_3 \cos\alpha_3 = 0, \qquad T_3 \sin\alpha_3 - T_2 \sin\alpha_2 - m_2 g = 0.$$

Обратите внимание на знак перед $T_2 \sin\alpha_2$: тот же участок верёвки поддерживает первый узел снизу вверх, а второй тянет вниз. Это сила, с которой участок действует на узел, и на разные концы участка она направлена в разные стороны.

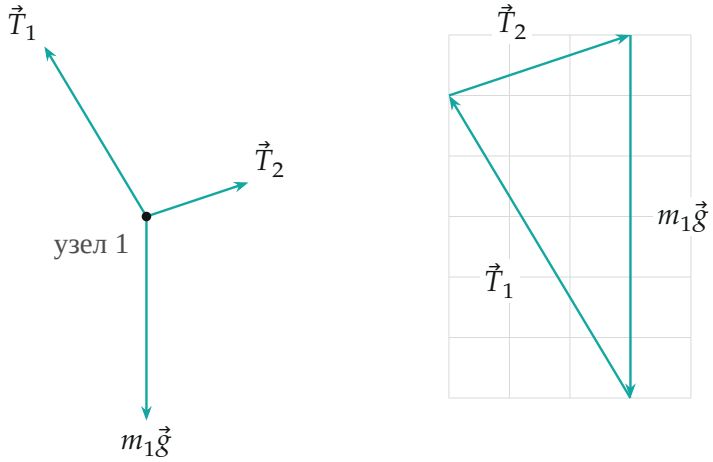
4. Общая горизонтальная составляющая. Горизонтальные уравнения дают

$$T_1 \cos\alpha_1 = T_2 \cos\alpha_2 = T_3 \cos\alpha_3 \equiv H.$$

Тогда $T_k \sin\alpha_k = H \operatorname{tg}\alpha_k$, и вертикальные уравнения принимают вид

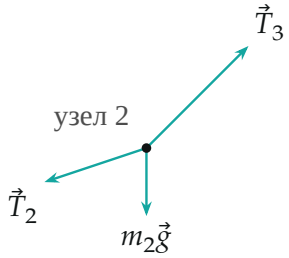
$$m_1 g = H\,(\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2), \qquad m_2 g = H\,(\operatorname{tg}\alpha_3 - \operatorname{tg}\alpha_2).$$

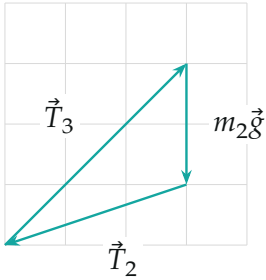
Неизвестная сила H сократится при делении. Удобно измерять силы в клетках: вектор силы каждого участка пропорционален вектору этого участка на рисунке (3 клетки вправо и 5, 1, 3 клетки вверх), и коэффициент пропорциональности h одинаков, потому что одинакова горизонтальная составляющая $H = 3h$. Тогда силы изображаются векторами $\vec{T}_1 = h\,(-3;\,5)$, $\vec{T}_2 = h\,(3;\,1)$ для первого узла.



Первый узел: слева — три силы, справа — те же векторы, сложенные друг за другом; треугольник замкнулся, значит $m_1 g = 6h$. Сторона клетки сетки равна h.

Для второго узла $\vec{T}_2$ направлена к первому узлу: $\vec{T}_2 = h\,(-3;\,-1)$, $\vec{T}_3 = h\,(3;\,3)$.





Второй узел: силы сложены в треугольник; он замкнулся при $m_2 g = 2h$.

Из замкнутых треугольников: $m_1 g = 5h + h = 6h$, $m_2 g = 3h - h = 2h$.

5. Ответ. Соберём ответ «матрёшкой»:

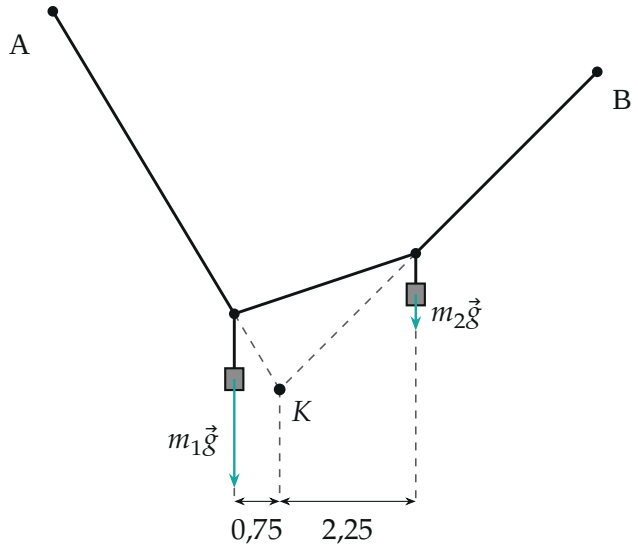
$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_3 - \operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\frac{5}{3} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{2/3} = 3.$$

Второй способ: вся система целиком. Возьмём в качестве системы верёвку вместе с обоими грузами. Внешних сил три: сила со стороны закреплённого конца A (вдоль крайнего участка), сила со стороны конца B (вдоль другого крайнего участка) и общая сила тяжести грузов. Три непараллельные силы уравновешены, только если их линии действия пересекаются в одной точке: иначе их моменты относительно точки пересечения двух линий не дадут нуль. Линии действия двух сил натяжения — продолжения крайних участков; найдём точку их пересечения K. Начало координат поместим в первый узел, единица длины — клетка. Продолжение первого участка проходит через начало с наклоном $-\frac{5}{3}$, продолжение третьего — через второй узел $(3;\,1)$ с наклоном 1:

$$y = -\frac{5}{3}x, \qquad y = x - 2.$$

Приравнивая,

$$-\frac{5}{3}x = x - 2 \quad \Rightarrow \quad x_K = \frac{3}{4}.$$



Линии действия трёх сил сходятся в точке K. Размеры внизу — в клетках сетки.

Через K проходит вертикаль, на которой лежит центр масс грузов (линия действия силы тяжести системы). Грузы висят на вертикалях $x = 0$ и $x = 3$, поэтому $x_c = \dfrac{3m_2}{m_1 + m_2} = \dfrac{3}{4}$, откуда $m_1 = 3m_2$. Тот же ответ получен без единого натяжения.

Проверка. Отношение двух масс безразмерно. Если $\operatorname{tg}\alpha_3 \to \operatorname{tg}\alpha_2$, верёвка от первого узла до B становится прямой, второй груз невесом, и формула даёт $m_1/m_2 \to \infty$; на рисунке $\operatorname{tg}\alpha_3 > \operatorname{tg}\alpha_2$, поэтому $m_2 > 0$. Физический смысл: вес груза пропорционален «перелому» верёвки в его узле, то есть сумме тангенсов углов по обе стороны узла: у первого узла он $\frac{5}{3} + \frac{1}{3} = 2$, у второго $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Ответ. $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_3 - \operatorname{tg}\alpha_2} = 3.$