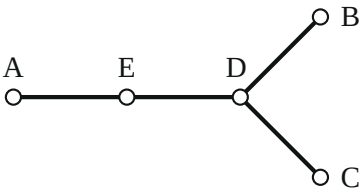
Четыре стержня и температуры

Задача 6. [ИОШ 2021/22, 9 класс, задача 6] Четыре одинаковых стержня AE, ED, DB и DC соединены так, как показано на рисунке. В точках соединения обеспечен тепловой контакт между стержнями. Температуры точек A, B и C поддерживаются равными: $t_A = t$, $t_B = 2t$, $t_C = 3t$. Найти температуру точки D. Поток тепла по стержню зависит от его длины, площади сечения и материала и пропорционален разности температур его концов. Потоком тепла через боковые поверхности стержней пренебречь.



▲ **Решение. Что происходит.** Режим установившийся: температуры точек не меняются, значит, сколько тепла за секунду приходит в узел D, столько из него и уходит. Поток по каждому стержню пропорционален разности температур концов — как ток через резистор пропорционален разности потенциалов. Тонкость — путь от A до D состоит из двух одинаковых стержней подряд: у такого «двойного» стержня коэффициент вдвое меньше. Это задача на теплопроводность в установившемся режиме (тепловой баланс узла).

Обозначения. $w_{X\to Y}$ — поток тепла (теплота за единицу времени) по стержню от точки X к точке Y; k — коэффициент пропорциональности для одного стержня: $w_{X\to Y} = k\,(t_X - t_Y)$; t_D, t_E — температуры точек D и E.

1. Закон для потока и его знак. Для стержня с концами X и Y по условию

$$w_{X\to Y} = k\,(t_X - t_Y).$$

Здесь k зависит только от длины, сечения и материала стержня; у четырёх одинаковых стержней он один. Формула верна при любом соотношении температур: если $t_X < t_Y$, поток отрицателен — тепло на самом

деле идёт от Y к X. Поэтому направления потоков заранее угадывать не нужно.

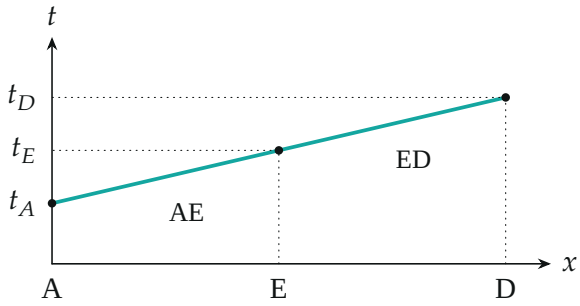
2. Поток по пути A–E–D. Узел E — только соединение двух стержней, его температура постоянна, поэтому тепловой баланс узла E: что пришло по AE, то ушло по ED,

$$k\,(t_A - t_E) = k\,(t_E - t_D) \quad \Rightarrow \quad t_E = \frac{t_A + t_D}{2}.$$

Тогда

$$w_{A\to D} = w_{A\to E} = k\,(t_A - t_E) = \frac{k}{2}\,(t_A - t_D).$$

Два стержня подряд — как один стержень двойной длины с коэффициентом $k/2$ (аналог последовательных резисторов).

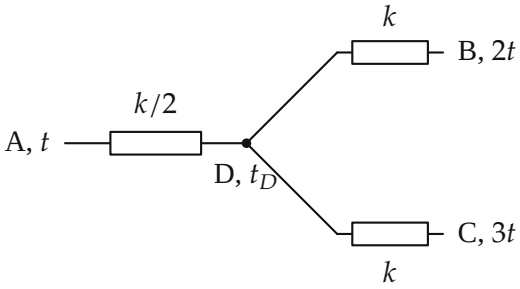


Температура вдоль пути A–E–D: потоки по AE и ED равны, поэтому перепады на них одинаковы и t_E — середина между t_A и t_D (рисунок для найденного ниже $t_D = 2{,}2t$).

3. Тепловой баланс узла D. Сумма всех потоков, входящих в D, равна нулю (какие-то из них отрицательны):

$$w_{A\to D} + w_{B\to D} + w_{C\to D} = 0,$$

$$\frac{k}{2}\,(t - t_D) + k\,(2t - t_D) + k\,(3t - t_D) = 0.$$



Тепловая схема: путь A–D заменён одним «стержнем» с коэффициентом $k/2$; узел D связан с тремя точками постоянной температуры.

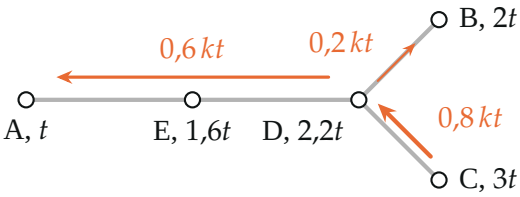
4. Решение. Сократим на k и умножим на 2:

$$(t - t_D) + 2(2t - t_D) + 2(3t - t_D) = 0 \quad \Rightarrow \quad 11t = 5t_D,$$

$$t_D = \frac{11}{5}\, t = 2{,}2\, t.$$

То есть t_D — средневзвешенная температура концов с весами, равными коэффициентам: $t_D = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot t + 1\cdot 2t + 1\cdot 3t}{\frac{1}{2} + 1 + 1}$.

5. Куда идёт тепло. Подставим $t_D = 2{,}2t$: $w_{C\to D} = 0{,}8\,kt > 0$ — тепло приходит из C; $w_{B\to D} = -0{,}2\,kt$ — уходит в B; $w_{A\to D} = -0{,}6\,kt$ — уходит в A. Баланс: $0{,}8 = 0{,}2 + 0{,}6$. Температура E: $t_E = (t + 2{,}2t)/2 = 1{,}6\,t$.



Потоки тепла в установившемся режиме: из C в D приходит $0{,}8\,kt$, из D в B уходит $0{,}2\,kt$, в A — $0{,}6\,kt$.

Обратите внимание. Для пути A–D нельзя писать $k\,(t - t_D)$ с тем же k: этот путь вдвое длиннее, и поток по нему вдвое меньше при той же разности температур. Без этого получилось бы $t_D = 2t$ — неверно.

Ответ. $t_D = \dfrac{11}{5}\,t = 2{,}2\,t$.

Проверка. Размерность: температура. Ответ лежит между наименьшей (t) и наибольшей ($3t$) заданными температурами — так и должно быть для средневзвешенной. Предел: если бы А был отсоединён (вес 0), $t_D = (2t + 3t)/2 = 2{,}5t$; присоединённый «холодный» А тянет t_D вниз, до $2{,}2t$. Прямая проверка баланса в шаге 5 сошлась.

Физический смысл. Узел в установившемся режиме принимает средневзвешенную температуру соседей, причём «вес» каждого соседа тем больше, чем лучше он проводит тепло к узлу.

Ответ. $t_D = \dfrac{11}{5}\,t = 2{,}2\,t$.