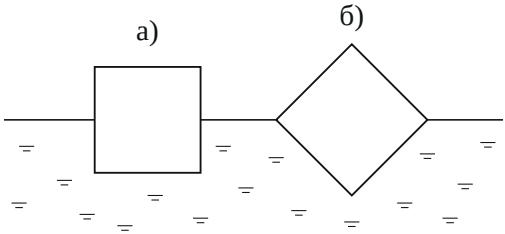
Остойчивость бруска в воде

Задача 2. [ИОШ 2022/23, отборочный этап, 10 класс, задача 2] При проектировании кораблей необходимо учитывать не только грузоподъёмность — сколько груза корабль может безопасно взять на борт, но и его устойчивость к опрокидыванию при крене (в кораблестроительной практике используется термин «остойчивость»). Рассмотрите модель корабля — брусок квадратного сечения с плотностью, равной половине плотности воды, плавающий в воде. Оба положения «корабля», показанные на рисунке, являются положениями равновесия. Какое из них — а или б — является устойчивым и почему? Ответ обосновать (даже правильный ответ без обоснования засчитываться не будет).



▲ **Решение. Что происходит.** Оба положения — равновесные: сила тяжести и сила Архимеда равны и лежат на одной вертикали. Вопрос об устойчивости: что будет при малом повороте — вернётся брусок или повернётся дальше. Задача на устойчивость равновесия: устойчиво то равновесие, в котором потенциальная энергия системы минимальна. Систему берём «брусок + вода», потому что при повороте бруска поднимается и опускается вытесненная вода.

Обозначения. a — сторона квадратного сечения, ρ_0 — плотность воды, $\rho = \rho_0/2$ — плотность бруска; ℓ — длина бруска; G — центр масс бруска (центр квадрата); B — центр масс погружённой части (центр вытесненного объёма), h — глубина точки B под уровнем воды; θ — угол поворота бруска от положения а).

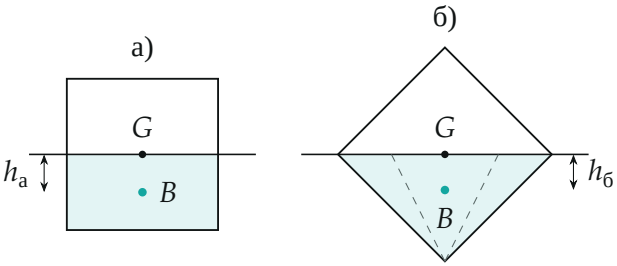
1. Центр бруска всегда на уровне воды. Условие плавания: сила тяжести бруска равна силе Архимеда, $\rho a^2 \ell g = \rho_0 V_{\text{погр}} g$, откуда $V_{\text{погр}} =$

$\frac{1}{2}a^2\ell$: погружена ровно половина сечения при любом наклоне. Любая прямая через центр квадрата делит его пополам, поэтому уровень воды всегда проходит через G. Значит, при повороте центр масс бруска не поднимается и не опускается, и его потенциальная энергия постоянна.

2. Энергия воды. Брусок занимает под водой объём $V_{\text{погр}}$; эта вода (масса $m_0 = \rho_0 V_{\text{погр}}$) вытеснена и разошлась тонким слоем по поверхности большого водоёма. По сравнению с «водоёмом без бруска» вода из области погружения поднята от точки B до поверхности, то есть на высоту h. Поэтому потенциальная энергия системы, отсчитанная от постоянной,

$$\Pi(\theta) = m_0 g\, h(\theta) + \text{const}.$$

Чем глубже центр погружённой части, тем больше энергия. Устойчиво то положение, где h минимальна.



Погружённая часть (бирюзовая): в а) — прямоугольник $a \times \frac{a}{2}$, его центр на глубине $a/4$; в б) — треугольник, центр в точке пересечения медиан (пунктир), на трети высоты.

3. Сравним два положения. а) Погружён прямоугольник высотой $a/2$, его центр — посередине:

$$h_а = \frac{a}{4} = 0{,}250\, a.$$

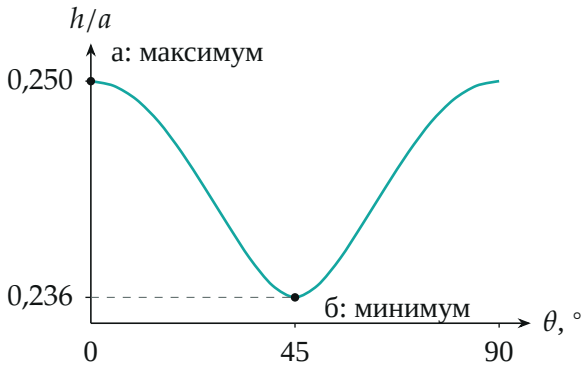
б) Погружён прямоугольный равнобедренный треугольник с основанием-диагональю на уровне воды; его высота — половина диагонали $a/\sqrt{2}$,

центр масс треугольника — на трети высоты от основания:

$$h_б = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6} a \approx 0{,}236\, a.$$

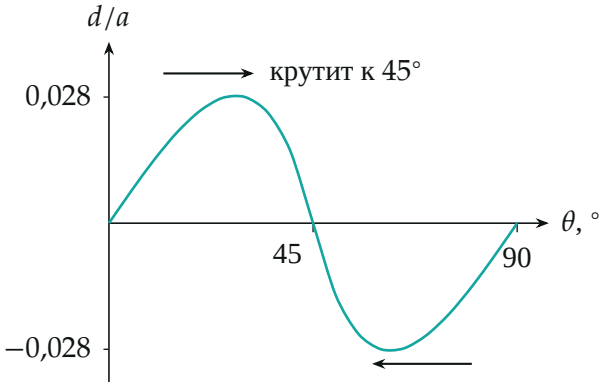
$h_б < h_а$, значит, $П_б < П_а$.

4. Все промежуточные положения. Чтобы утверждать «а — максимум, б — минимум», нужно знать h при любом угле. Посчитаем центр погружённой половины квадрата при повороте на угол θ (обрезка квадрата прямой через центр, центр масс многоугольника — численно). Функция периодична с периодом 90° и симметрична относительно 45°. Между 0° (положение а) и 45° (положение б) она монотонно убывает: других равновесий там нет, $\theta = 0$ — максимум энергии, $\theta = 45°$ — минимум.



Глубина центра погружённой части в зависимости от угла поворота (расчёт по точкам через 5°). Энергия системы ей пропорциональна: положение а) — вершина «горки», б) — дно «ямы».

5. Второй способ — моменты сил при малом крене. Наклоним брусок на малый угол θ от положения а). Сила тяжести приложена в G, сила Архимеда — в B; они равны и противоположны и образуют пару сил с плечом d — горизонтальным расстоянием от G до B. Тот же расчёт даёт $d(\theta)$: при $0 < \theta < 45°$ точка B смещается в ту сторону, куда пара сил поворачивает брусок *дальше* от а) — к б); при $45° < \theta < 90°$ — обратно к 45°. Значит, от а) брусок уходит, к б) возвращается.



Плечо пары сил «тяжесть — Архимед»: $d > 0$ — пара поворачивает брусок в сторону роста θ, $d < 0$ — обратно. Обе стрелки показывают к $\theta = 45°$ (положение б).

Обратите внимание. Потенциальная энергия самого бруска здесь не меняется (центр всегда на уровне воды), поэтому смотреть только на брусок бесполезно — меняется энергия *воды*. Сила Архимеда приложена не к центру бруска, а к центру вытесненного объёма B, и при крене B смещается.

Соберём ответ. Энергия системы $\Pi = m_0 g\, h + \text{const}$; $h_\text{а} = a/4$ — максимум, $h_\text{б} = \sqrt{2}a/6$ — минимум. Положение б) устойчиво, а) неустойчиво.

Проверка. Размерность: $m_0 g h$ — джоули. Два независимых способа — энергия (пункты 2–4) и плечо пары сил (пункт 5) — дают одно и то же; они и обязаны совпадать, потому что момент пары равен минус производной энергии по углу: где h убывает, там $d > 0$. Знакомая проверка из кораблестроения: в а) метацентрическая высота $\frac{a^3/12}{a^2/2} - \frac{a}{4} = \frac{a}{6} - \frac{a}{4} < 0$ — отрицательна, положение неустойчиво. Физический смысл: брусок, положенный плашмя, сам перевалится на ребро.

Ответ. Устойчиво положение б), положение а) неустойчиво: в б) центр погружённой части выше ($h_\text{б} = \sqrt{2}a/6 < h_\text{а} = a/4$), и потенциальная энергия системы «брусок + вода» минимальна.