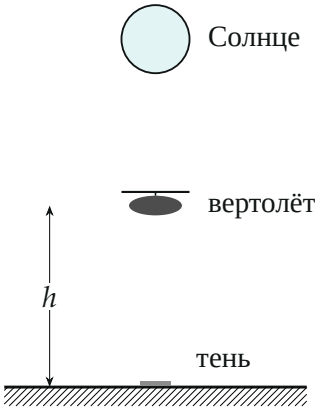
Тень от вертолёта

Задача 3. [ИОШ 2022/23, отборочный этап, 10 класс, задача 3] В ясную солнечную погоду в небо поднимается вертолёт. Оказалось, что вертолёт отбрасывает тень на землю, если высота его подъёма не превышает $h = 1$ км. При больших высотах тень от вертолёта пропадает. Считая, что угловой размер Солнца составляет $\Delta\alpha = 0{,}5°$, оцените размеры вертолёта. Считайте, что Солнце находится в зените (прямо над головой).



Поясняющий рисунок: Солнце в зените, вертолёт на высоте h, под ним на земле — тень (размеры не в масштабе).

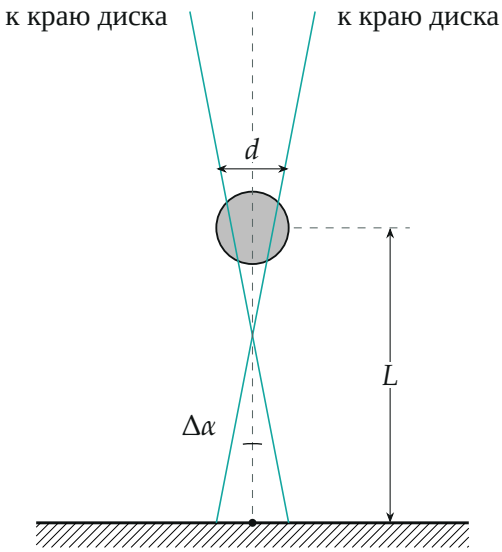
▲ **Решение. Что происходит.** Солнце — не точка, а диск с угловым размером $\Delta\alpha$. За непрозрачным телом есть полная тень — область, куда не попадает свет ни от одной точки диска. Она сужается с расстоянием и кончается вершиной конуса, где тело закрывает Солнце ровно целиком. Тень на земле пропадает, когда вершина этого конуса поднимается до земли и выше: с земли вертолёт виден под углом, меньшим углового размера Солнца, и не может закрыть его целиком. Это задача геометрической оптики на полную тень от протяжённого источника.

Обозначения. d — характерный поперечный размер вертолёта (для оценки считаем его шаром диаметра d); H — текущая высота; $h = 1$ км — высота, на которой тень пропадает; $\Delta\alpha = 0{,}5°$.

1. Граничные лучи. Полную тень ограничивают лучи, идущие от противоположных краёв солнечного диска и касающиеся противоположных краёв вертолёта. Лучи от краёв диска образуют с вертикалью углы $\pm\Delta\alpha/2$, поэтому граница полной тени — конус с углом раствора $\Delta\alpha$, вершина которого лежит на расстоянии L ниже вертолёта:

$$\frac{d}{2} = L\,\mathrm{tg}\,\frac{\Delta\alpha}{2} \approx L\,\frac{\Delta\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{d}{\Delta\alpha}$$

(угол мал, $\mathrm{tg}\,x \approx x$ в радианах).

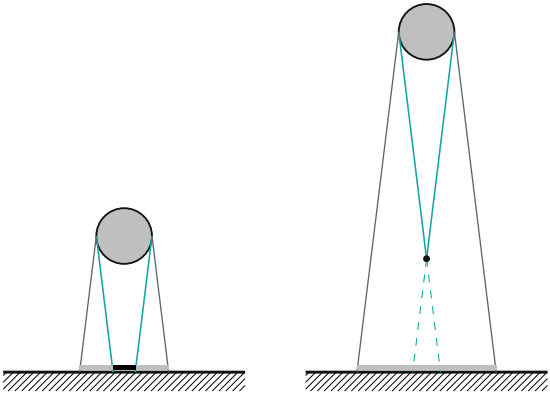


Граница полной тени: лучи от двух противоположных краёв Солнца, касающиеся вертолёта, сходятся на расстоянии $L = d/\Delta\alpha$. Угол $\Delta\alpha$ на рисунке сильно увеличен.

2. Когда тень есть. При $H < L$ вершина конуса ниже земли, и на земле остаётся пятно полной тени. Его размер найдём из подобия: пятно — сечение конуса на расстоянии $L - H$ от вершины,

$$s = d\,\frac{L-H}{L} = d - H\,\Delta\alpha.$$

При $H > L$ пятна полной тени нет: на землю под вертолётом попадает свет от части солнечного диска, остаётся только размытая полутень, которую глаз не замечает. Граница — $H = L$.



$H < L$: тень есть $H > L$: только полутень

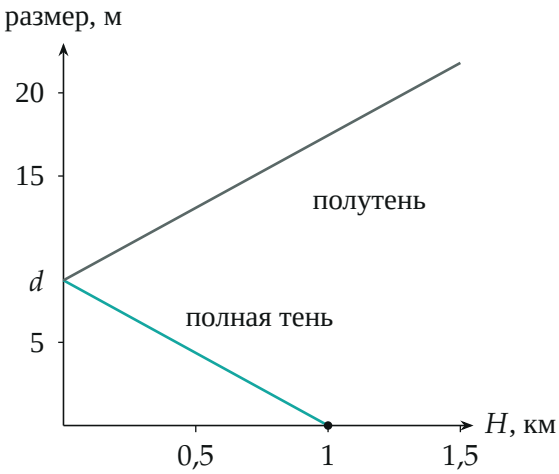
Бирюзовые линии — граница полной тени, серые — граница полутени. Слева вершина конуса под землёй, на земле чёрное пятно; справа вершина выше земли, и на земле только светло-серая полутень.

3. Размер вертолёта. Тень пропадает на высоте h, значит, $L = h$:

$$d = h\,\Delta\alpha.$$

Угол — в радианах: $\Delta\alpha = 0{,}5^\circ \cdot \dfrac{\pi}{180^\circ} = 8{,}7 \cdot 10^{-3}$. Получаем

$$d = \frac{\pi}{180}\,\Delta\alpha\, h = 8{,}7 \cdot 10^{-3} \cdot 1000\ \text{м} \approx 9\ \text{м}.$$



Размер пятна полной тени $s = d - H\Delta\alpha$ (бирюза) и полутени $d + H\Delta\alpha$ (серый) при $d = 8{,}7$ м. Полная тень стягивается в точку на высоте 1 км.

Обратите внимание. Угол в формуле $d = h\Delta\alpha$ — в радианах; подставив градусы, получим 500 м вместо 9 м.

Соберём ответ:

$$d = h\,\Delta\alpha = \frac{\pi}{180} \cdot 0{,}5 \cdot 1000 \text{ м} \approx 9 \text{ м}.$$

Проверка. Размерность: радиан безразмерен, d — в метрах. Второй способ: с земли тело размером d на высоте h видно под углом d/h; тень пропадает, когда этот угол меньше углового размера Солнца, то есть при $d/h = \Delta\alpha$ — то же. Сравнение: Луна закрывает Солнце целиком потому, что её угловой размер тоже около $0{,}5°$. Физический смысл: девять метров — как раз размер вертолёта с винтом.

Ответ. $d = h\,\Delta\alpha$ (угол в радианах) $= \dfrac{\pi}{180}\,\Delta\alpha\, h \approx 9$ м.