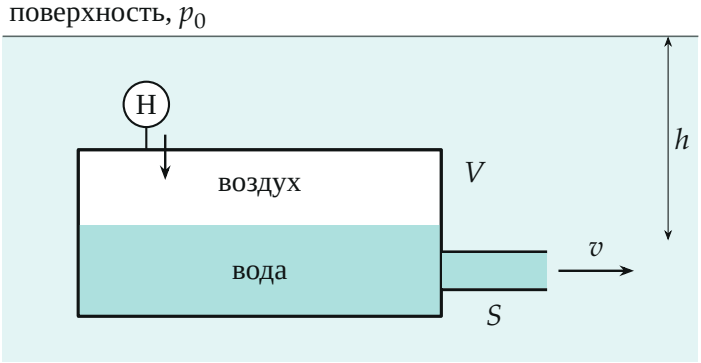
Продувка балластного резервуара

Задача 5. [ИОШ 2022/23, отборочный этап, 10 класс, задача 5] Балластный резервуар объёмом $V = 5000$ л подводной лодки заполнен водой. Для сброса балласта в резервуар с помощью насоса подаётся воздух, и вода через трубу сечением 100 см^2 вытекает наружу. Оценить, какой должна быть мощность насоса, чтобы лодка на глубине $h = 100$ м могла полностью освободиться от балластной воды за время $t = 30$ с? Считать, что атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2, плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3.



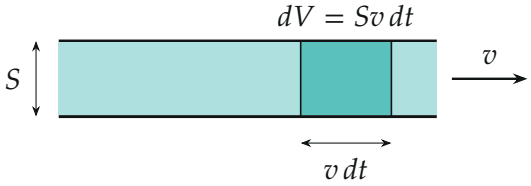
Поясняющий рисунок: насос Н нагнетает воздух в резервуар объёмом V, вода уходит через трубу сечением S на глубине h.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Воздух от насоса работает как поршень: он выталкивает воду из резервуара наружу, где давление воды $p_0 + \rho g h$. Работа насоса идёт на две вещи — продавить воду против этого давления и разогнать её в трубе до скорости v. Это задача на закон сохранения энергии (работа насоса = работа против внешнего давления + кинетическая энергия вытекшей воды).

Обозначения. $S = 100$ см^2 $= 10^{-2}$ м^2 — сечение трубы; $p = p_0 + \rho g h$ — давление воды снаружи у выхода трубы; v — скорость воды в трубе; $m = \rho V$ — масса балласта; A — работа насоса, N — его мощность. Оценку делаем, как у организаторов: поток воды считаем постоянным, разность высот внутри лодки (~ 1 м) против $h = 100$ м не учитываем, теплом и трением пренебрегаем.

1. Скорость воды в трубе. Весь объём V проходит через трубу за время t, поэтому объём, ушедший за dt, равен $Sv\,dt$ (столбик воды длиной $v\,dt$, рисунок):

$$Sv\,t = V \quad \Rightarrow \quad v = \frac{V}{St} = \frac{5}{10^{-2}\cdot 30} \approx 16{,}7 \text{ м/с}.$$

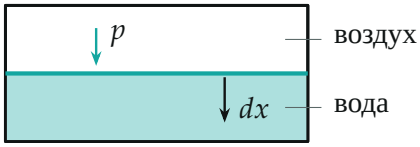


За время dt из трубы выходит столбик воды длиной $v\,dt$ и объёмом $Sv\,dt$.

2. Работа против давления воды. Возьмём вытекающий из трубы столбик объёмом dV. Снаружи на его торец давит вода с силой pS, и чтобы сдвинуть торец на $v\,dt$, нужно совершить работу $pS\cdot v\,dt = p\,dV$. Давление p за время продувки не меняется (лодка на той же глубине), поэтому суммирование от начала продувки до конца даёт просто

$$A_1 = pV = (p_0 + \rho g h)\,V.$$

Это та же работа, что совершает газ при постоянном давлении, расширяясь на V: воздух в резервуаре вытесняет воду, как поршень (рисунок).



Граница «воздух – вода» как поршень: при сдвиге на dx воздух под давлением p совершает работу $p\,dV$.

3. Кинетическая энергия воды. Каждая порция воды выходит из трубы со скоростью v, а в резервуаре она почти покоилась (сечение ре-

зервуара много больше S). Вся вода массой $m = \rho V$ получает кинетическую энергию

$$A_2 = \frac{mv^2}{2} = \frac{\rho V}{2}\left(\frac{V}{St}\right)^2 = \frac{\rho V^3}{2S^2t^2}.$$

4. Мощность. Работа насоса $A = A_1 + A_2$, она совершается равномерно за время t:

$$N = \frac{A}{t} = \frac{(p_0 + \rho g h)\,V}{t} + \frac{\rho V^3}{2S^2t^3}.$$

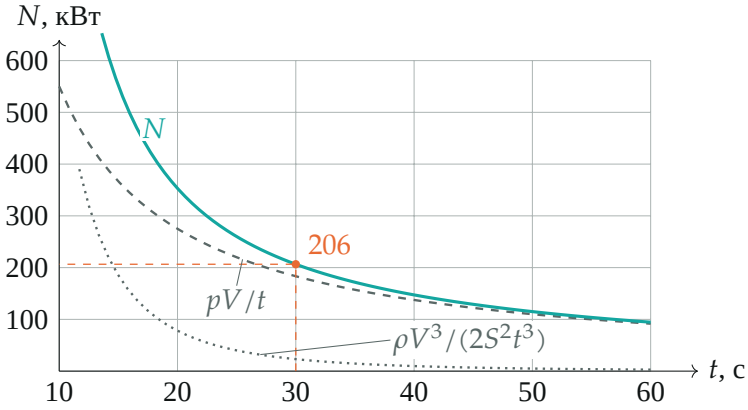
Числа: $p_0 + \rho g h = 10^5 + 10^3 \cdot 10 \cdot 100 = 1{,}1 \cdot 10^6$ Па,

$$\frac{(p_0 + \rho g h)\,V}{t} = \frac{1{,}1 \cdot 10^6 \cdot 5}{30} \approx 183 \text{ кВт},$$

$$\frac{\rho V^3}{2S^2t^3} = \frac{10^3 \cdot 125}{2 \cdot 10^{-4} \cdot 2{,}7 \cdot 10^4} \approx 23 \text{ кВт},$$

$$N \approx 183 + 23 \approx 206 \text{ кВт}.$$

Вклад кинетической энергии — около 11 %. При более быстрой продувке он растёт как $1/t^3$, а вклад давления — только как $1/t$ (график).



Мощность насоса в зависимости от времени продувки (по формуле пункта

4): штрих — работа против давления, точки — кинетическая энергия, сплошная — сумма; при $t = 30$ с $N \approx 206$ кВт.

Обратите внимание. Давление снаружи — полное, $p_0 + \rho g h$: над водой на глубине ещё и атмосфера. Если работать «от давления в лодке» (насос берёт воздух из отсеков при p_0), первое слагаемое стало бы $\rho g h V/t \approx 167$ кВт, но и тогда ответ того же порядка — для оценки это не важно. Мы следуем модели организаторов.

Проверка. Размерность: $[pV/t] = \text{Па} \cdot \text{м}^3/\text{с} = \text{Дж/с} = \text{Вт}$; $[\rho V^3/(S^2 t^3)] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot \frac{\text{м}^9}{\text{м}^4\,\text{с}^3} = \frac{\text{кг}\,\text{м}^2}{\text{с}^3} = \text{Вт}$. Предел: при очень медленной продувке ($t \to \infty$) кинетическая часть исчезает и остаётся работа «газа при постоянном давлении» pV. Второй способ для кинетической части: поток энергии через трубу $\frac{\rho v^2}{2} \cdot Sv = \frac{10^3 \cdot 16{,}7^2}{2} \cdot 10^{-2} \cdot 16{,}7 \approx 23$ кВт — то же.

Смысл: основная цена продувки на глубине — давление воды; скорость истечения добавляет к ней десятую часть.

Ответ. $N = \dfrac{(p_0 + \rho g h)\,V}{t} + \dfrac{\rho V^3}{2S^2 t^3} \approx 206$ кВт.