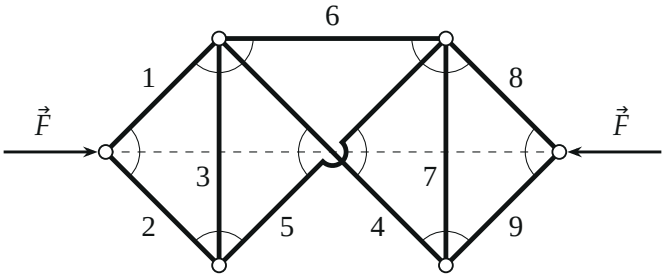
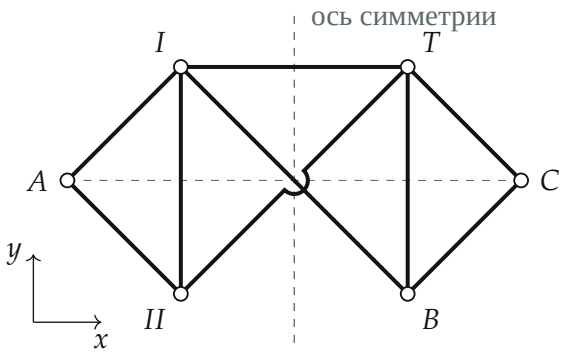
Ферма из девяти стержней

Задача 6. [ИОШ 2022/23, отборочный этап, 10 класс, задача 6] Девять жёстких невесомых стержней связаны невесомыми шарнирами. На два крайних шарнира действуют одинаковые по величине силы $\vec{F}$, направленные противоположно вдоль одной прямой. Все углы, отмеченные на рисунке дугами, равны 45°. Определить силы натяжения стержней F_1, F_2, … F_9. Какие из стержней будут растянуты, какие сжаты? Считать, что стержни 4 и 5 посередине системы не касаются друг друга и никак друг на друга не влияют (на рисунке это показано разрывом одного из стержней).



▲ **Решение. Что происходит.** Это статика шарнирной фермы: невесомый стержень с шарнирами на концах тянет или толкает шарнир только вдоль себя, поэтому для каждого шарнира условие равновесия — сумма сил стержней и внешней силы равна нулю. Ключевая идея — симметрия: ферма вместе с нагрузкой переходит в себя при отражении «право – лево». Она сразу даёт попарное равенство сил, после чего хватает равновесия трёх шарниров.

Обозначения. Шарниры: A и C — крайние, I и II — левые верхний и нижний, T и B — правые верхний и нижний (рисунок ниже). Ось x — вправо вдоль линии сил $\vec{F}$, ось y — вверх. T_k — сила натяжения стержня k со знаком: $T_k > 0$ — стержень растянут и тянет шарниры к себе, $T_k < 0$ — сжат и отталкивает их; модуль $F_k = |T_k|$. Все наклонные стержни идут под 45° к оси x, $\cos 45° = \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$.



Обозначения шарниров. При отражении относительно вертикальной оси $A \leftrightarrow C$, $I \leftrightarrow T$, $II \leftrightarrow B$.

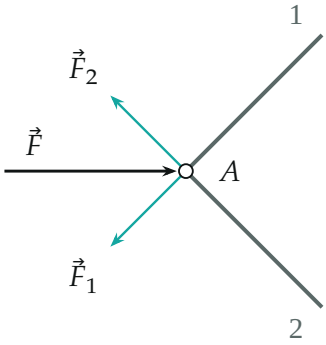
1. Симметрия. Отразим ферму относительно вертикальной прямой посередине. Шарнир A переходит в C, I — в T, II — в B. Стержни: $1 \leftrightarrow 8$, $2 \leftrightarrow 9$, $3 \leftrightarrow 7$, $6 \to 6$, а стержень 4 (I–B) переходит в стержень T–II, то есть в стержень 5. Сила $\vec{F}$ на A (вправо) переходит в силу на C (влево) — нагрузка тоже переходит в себя. Ферма статически определима (9 неизвестных сил, 12 уравнений равновесия шести шарниров, из них 3 выполняются автоматически, потому что сумма внешних сил и их моментов равна нулю), значит, распределение сил единственно и обязано быть симметричным:

$$T_1 = T_8, \qquad T_2 = T_9, \qquad T_3 = T_7, \qquad T_4 = T_5.$$

2. Шарнир A. Условие равновесия шарнира A: $\vec{F} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0$, где $\vec{T}_1$ направлена вдоль стержня 1 к шарниру I (вверх-вправо), $\vec{T}_2$ — вдоль стержня 2 к II (вниз-вправо). В проекциях:

$$y: \ \frac{T_1}{\sqrt{2}} - \frac{T_2}{\sqrt{2}} = 0, \qquad x: \ F + \frac{T_1}{\sqrt{2}} + \frac{T_2}{\sqrt{2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1 = T_2 = -\frac{F}{\sqrt{2}}.$$

Знак минус: стержни 1 и 2 сжаты — сила $\vec{F}$ вдавливает шарнир A внутрь фермы. По симметрии сжаты и стержни 8, 9: $T_8 = T_9 = -\dfrac{F}{\sqrt{2}}$.



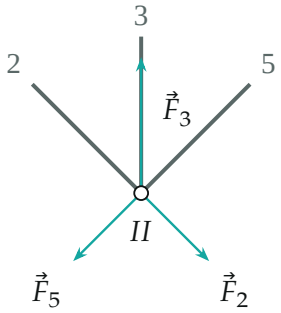
Силы на шарнир A (уже с найденными направлениями): сжатые стержни 1 и 2 отталкивают шарнир, их сумма уравновешивает $\vec{F}$.

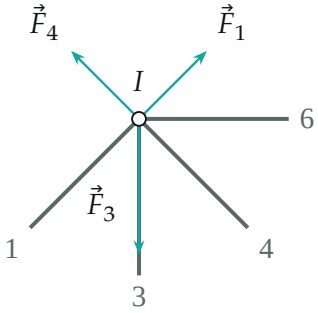
3. Шарнир *II*. На него действуют стержни 2 (к A, вверх-влево), 3 (к I, вверх) и 5 (к T, вверх-вправо). Условие равновесия $\vec{T}_2 + \vec{T}_3 + \vec{T}_5 = 0$ в проекциях:

$$x: \quad -\frac{T_2}{\sqrt{2}} + \frac{T_5}{\sqrt{2}} = 0 \;\Rightarrow\; T_5 = T_2 = -\frac{F}{\sqrt{2}},$$

$$y: \quad \frac{T_2}{\sqrt{2}} + T_3 + \frac{T_5}{\sqrt{2}} = 0 \;\Rightarrow\; T_3 = -\sqrt{2}\,T_2 = F.$$

Стержень 5 сжат, стержень 3 растянут. По симметрии $T_4 = T_5 = -\dfrac{F}{\sqrt{2}}$ (сжат), $T_7 = T_3 = F$ (растянут).





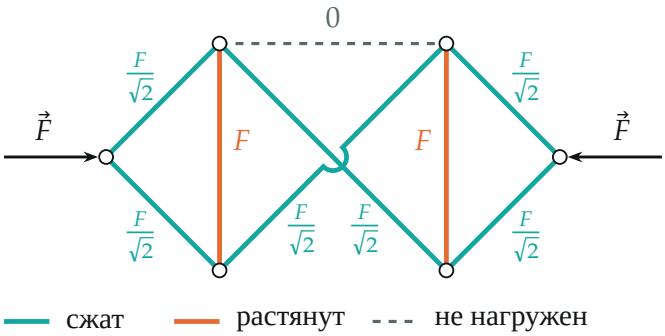
Силы на шарниры II и I (направления — по найденным знакам): сжатые стержни 1, 2, 4, 5 отталкивают шарнир, растянутый стержень 3 тянет его к себе. Стержень 6 силы не даёт.

4. Шарнир I и стержень 6. На шарнир I действуют стержни 1 (к A, вниз-влево), 3 (к II, вниз), 4 (к B, вниз-вправо) и 6 (к T, вправо). Условие равновесия $\vec{T}_1 + \vec{T}_3 + \vec{T}_4 + \vec{T}_6 = 0$ в проекции на ось x:

$$-\frac{T_1}{\sqrt{2}} + \frac{T_4}{\sqrt{2}} + T_6 = 0 \quad \Rightarrow \quad T_6 = \frac{T_1 - T_4}{\sqrt{2}} = 0,$$

так как $T_1 = T_4 = -\dfrac{F}{\sqrt{2}}$. Проекция на ось y служит проверкой: $-\dfrac{T_1}{\sqrt{2}} - T_3 - \dfrac{T_4}{\sqrt{2}} = \dfrac{F}{2} - F + \dfrac{F}{2} = 0$ — выполняется.

Стержень 6 не нагружен: каждая половина фермы держит свою силу $\vec{F}$ сама, а стержни 4 и 5 передают сжатие крест-накрест. Итог — на рисунке.



Ответ на схеме: модули сил в стержнях.

Обратите внимание. Без стержня 6 ферма тоже держит нагрузку, но стержень 6 нельзя «выбросить» заранее из соображений интуиции: его нулевая сила следует из равновесия шарнира I после использования симметрии. Верхне-нижней симметрии у фермы нет (стержень 6 только сверху), поэтому равенство $T_1 = T_2$ берём не из неё, а из равновесия шарнира A.

Проверка. Размерность: все силы выражены через F. Второй способ — прямое решение всех 12 уравнений равновесия шести шарниров (python) даёт те же значения: $T_1 = T_2 = T_4 = T_5 = T_8 = T_9 = -0{,}707F$, $T_3 = T_7 = F$, $T_6 = 0$. Смысл: сила $\vec{F}$ раздаётся на два сжатых стержня под 45°, а вертикальные стержни 3 и 7 стягивают шарниры, которые эти стержни раздвигают.

Ответ. Стержни 1, 2, 4, 5, 8, 9 сжаты, $F_1 = F_2 = F_4 = F_5 = F_8 = F_9 = \dfrac{F}{\sqrt{2}}$; стержни 3 и 7 растянуты, $F_3 = F_7 = F$; стержень 6 не нагружен, $F_6 = 0$.