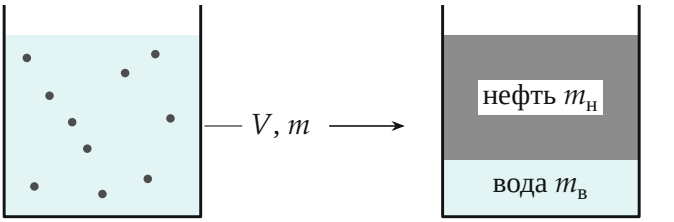
Нефть в загрязнённой воде

Задача 1. [ИОШ 2022/23, отборочный этап, 11 класс, задача 1] При причаливании танкера к речному причалу произошло небольшое столкновение, и часть нефти вылилась в реку. Была проведена очистка акватории реки, во время которой собрали объём $V = 2000$ л загрязнённой жидкости, которая имела массу $m = 1{,}725$ т. Какую массу нефти содержала данная жидкость? Плотность нефти $\rho = 800$ кг/м^3, плотность воды $\rho_0 = 1000$ кг/м^3.



Поясняющий рисунок. Смесь объёмом V и массой m мысленно разделим на чистую воду и чистую нефть: масса и объём при этом не меняются.

▲ **Решение. Что происходит.** Собранная жидкость — смесь воды и нефти. Две неизвестные (массы воды и нефти) связаны двумя условиями: сумма масс равна m, сумма объёмов равна V. Главная идея — считать, что при смешивании объёмы складываются: нефть с водой не смешиваются на уровне молекул, а просто лежат рядом.

Обозначения. $m_н$ и $m_в$ — массы нефти и воды в собранной жидкости; $V_н = m_н/\rho$ и $V_в = m_в/\rho_0$ — их объёмы. Переведём данные в СИ: $V = 2000$ л $= 2$ м^3, $m = 1725$ кг.

1. Масса. Масса смеси складывается из масс компонент:

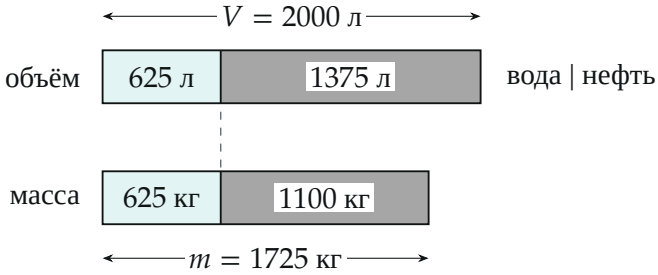
$$m_в + m_н = m \quad \Rightarrow \quad m_в = m - m_н.$$

2. Объём. Объём каждой компоненты — её масса, делённая на плотность; объём смеси — сумма объёмов:

$$\frac{m - m_н}{\rho_0} + \frac{m_н}{\rho} = V.$$

Это одно уравнение с одной неизвестной $m_н$. Умножим его на $\rho_0\rho$:

$$\rho(m - m_н) + \rho_0 m_н = \rho_0\rho V \quad \Rightarrow \quad m_н = \frac{\rho\,(\rho_0 V - m)}{\rho_0 - \rho}.$$

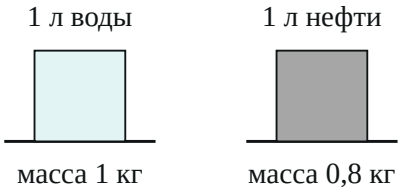


Результат в одном масштабе (200 л и 200 кг на клетку длины): литр воды весит 1 кг, литр нефти — 0,8 кг, поэтому полоса нефти в массе короче, чем в объёме.

3. Числа.

$$m_н = \frac{800 \cdot (1000 \cdot 2 - 1725)}{1000 - 800}\ \text{кг} = \frac{800 \cdot 275}{200}\ \text{кг} = 1100\ \text{кг}.$$

Нефти $V_н = 1100/800 = 1{,}375$ м^3, воды $m_в = 625$ кг, то есть 0,625 м^3; вместе 2 м^3, как и должно быть.



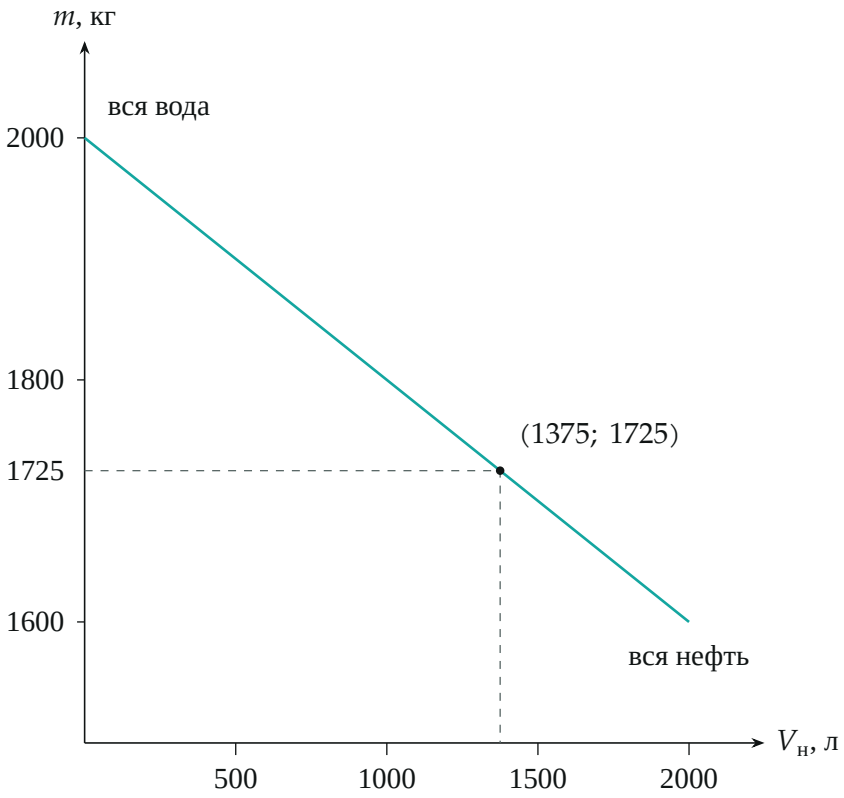
Замена литра воды литром нефти облегчает смесь на 0,2 кг: на этом держится второй способ.

4. Второй способ — «недостача массы». Будь все 2000 л водой, масса была бы $\rho_0 V = 2000$ кг. Каждый кубометр нефти вместо воды уменьшает массу на $\rho_0 - \rho = 200$ кг. Недостаёт $2000 - 1725 = 275$ кг, значит,

нефти

$$V_{\text{н}} = \frac{\rho_0 V - m}{\rho_0 - \rho} = \frac{275}{200}\ \text{м}^3 = 1{,}375\ \text{м}^3, \qquad m_{\text{н}} = \rho V_{\text{н}} = 1100\ \text{кг}.$$

Это та же формула: $m_{\text{н}} = \rho\,(\rho_0 V - m)/(\rho_0 - \rho)$.



Масса двух тысяч литров смеси в зависимости от объёма нефти в ней: прямая от 2000 кг (одна вода) до 1600 кг (одна нефть). Измеренной массе 1725 кг отвечает $V_{\text{н}} = 1375$ л.

Обратите внимание. Ответ очень чувствителен к данным: в формуле стоит малая разность $\rho_0 V - m = 275$ кг. Ошибка взвешивания на 1 % (17 кг) меняет массу нефти почти на 70 кг. Поэтому массу смеси и дали с точностью до килограмма.

Соберём ответ:

$$m_{\text{н}} = \frac{\rho\,(\rho_0 V - m)}{\rho_0 - \rho} = 1100 \text{ кг} = 1{,}1 \text{ т}.$$

Проверка. Размерность: $\dfrac{(\text{кг/м}^3)\cdot \text{кг}}{\text{кг/м}^3} = \text{кг}$. Пределы: при $m = \rho_0 V$ (жидкость весит как вода) получаем $m_{\text{н}} = 0$; при $m = \rho V$ (весит как нефть) $m_{\text{н}} = \rho V = m$, вся жидкость — нефть. Второй способ («недостача массы») дал то же. Физический смысл: по объёму нефть составляет больше двух третей собранной жидкости (1375 из 2000 л).

Ответ. $m_{\text{н}} = \dfrac{\rho\,(\rho_0 V - m)}{\rho_0 - \rho} = 1100$ кг.