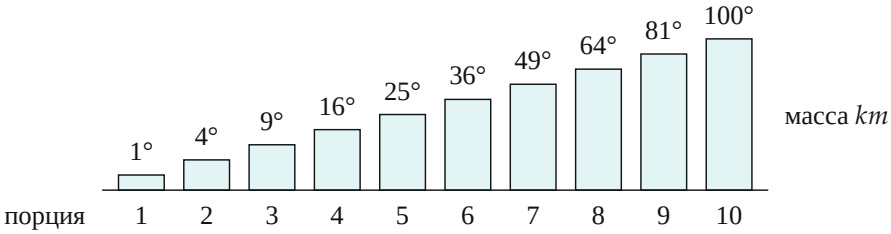
Смешение десяти порций воды

Задача 2. [ИОШ 2022/23, отборочный этап, 11 класс, задача 2] В теплоизолированном калориметре смешали 10 порций воды: (1) массой $m = 10$ г с температурой $t = 1\,^\circ$C, (2) массой $2m = 20$ г с температурой $2^2t = 4\,^\circ$C, (3) массой $3m = 30$ г с температурой $3^2t = 9\,^\circ$C, (4) массой $4m = 40$ г с температурой $4^2t = 16\,^\circ$C, … (10) массой $10m = 100$ г с температурой $10^2t = 100\,^\circ$C. Найти температуру смеси.



Поясняющий рисунок. Высота столбика — масса порции km, над столбиком — её температура k^2t в градусах Цельсия.

▲ **Решение. Что происходит.** Теплообмен внутри теплоизолированного калориметра: горячие порции отдают теплоту, холодные получают, и вся смесь приходит к одной температуре t_x. Ключевой закон — уравнение теплового баланса. Задача на «взвешенное среднее»: температура смеси — среднее температур порций с весами, равными массам.

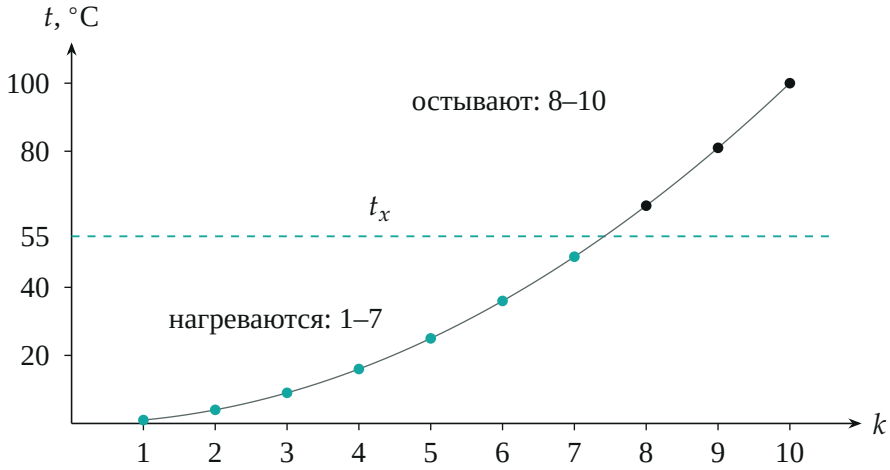
Обозначения. $k = 1, 2, \ldots, n$ — номер порции, $n = 10$; масса порции km, начальная температура k^2t; c — удельная теплоёмкость воды; t_x — искомая температура смеси. Теплоёмкостью калориметра пренебрегаем (её нет в данных).

1. Тепловой баланс. Калориметр теплоизолирован, поэтому алгебраическая сумма количеств теплоты, полученных всеми порциями, равна нулю. Порция k получает $Q_k = c \cdot km\,(t_x - k^2t)$; у горячих порций $Q_k < 0$ — они теплоту отдают. Записываем один баланс для всех порций сразу, не выясняя заранее, какие из них горячие:

$$\sum_{k=1}^{n} c\,km\,(t_x - k^2t) = 0.$$

c и m сокращаются:

$$t_x \sum_{k=1}^{n} k = t \sum_{k=1}^{n} k^3 \quad \Rightarrow \quad t_x = t\,\frac{1^3 + 2^3 + \ldots + n^3}{1 + 2 + \ldots + n}.$$



Начальные температуры порций $k^2 t$ (точки на параболе) и найденная ниже температура смеси $t_x = 55\,°C$. Порции 1–7 нагреваются (бирюзовые точки), 8–10 остывают.

2. Суммы. Сумма первых n натуральных чисел и сумма их кубов:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Сумма кубов равна квадрату суммы чисел, поэтому их отношение — снова сумма чисел:

$$t_x = t\,\frac{n(n+1)}{2}.$$

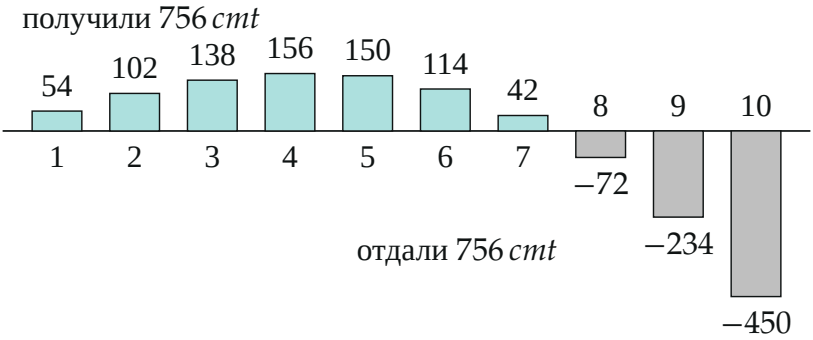
При $n = 10$: $1 + 2 + \ldots + 10 = 55$, $1^3 + \ldots + 10^3 = 3025 = 55^2$, и

$$t_x = 55\,t = 55\,^\circ\text{C}.$$

3. Проверка балансом по порциям. Посчитаем, сколько теплоты получает каждая порция при $t_x = 55\,^\circ\text{C}$, в единицах cmt: $Q_k/(cmt) = k\,(55 - k^2)$.

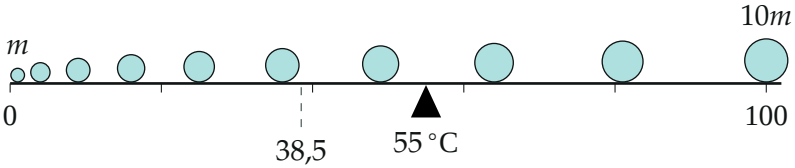
k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$Q_k/(cmt)$	54	102	138	156	150	114	42	−72	−234	−450

Получено холодными порциями: $54 + 102 + 138 + 156 + 150 + 114 + 42 = 756$; отдано горячими: $72 + 234 + 450 = 756$. Баланс сходится.



Теплота, полученная каждой порцией (в единицах cmt): вверх — получили холодные порции, вниз — отдали горячие. Суммы равны, как требует тепловой баланс.

4. Второй взгляд — «центр масс» температур. Формула $t_x = \dfrac{\sum km \cdot k^2 t}{\sum km}$ — это то же, что положение центра масс грузов массами km, стоящих на линейке в точках $k^2 t$. Тяжёлые порции стоят справа, поэтому «точка опоры» 55 °C заметно правее простого среднего температур $(1 + 4 + \ldots + 100)/10 = 38{,}5\,^\circ\text{C}$.



Порции как грузы на линейке температур: груз массой km стоит в точке k^2t. Линейка уравновешена на опоре в точке $t_x = 55\,°C$; пунктир — простое среднее температур.

Обратите внимание. Температура смеси — не среднее арифметическое температур (38,5 °C): у горячих порций масса больше, и они «тянут» среднее к себе.

Соберём ответ:

$$t_x = t\,\frac{1^3 + \ldots + n^3}{1 + \ldots + n} = \frac{n(n+1)}{2}\,t = 55\,°\text{C}.$$

Проверка. Размерность: t_x выражена через t безразмерным множителем. Предел: при $n = 1$ одна порция, $t_x = t$ — верно. Второй способ — прямой подсчёт таблицы теплот: получено и отдано по $756\,cmt$. Физический смысл: тяжёлые и горячие порции перевешивают, поэтому смесь горячее простого среднего.

Ответ. $t_x = \dfrac{n(n+1)}{2}\,t = 55\,°\text{C}.$