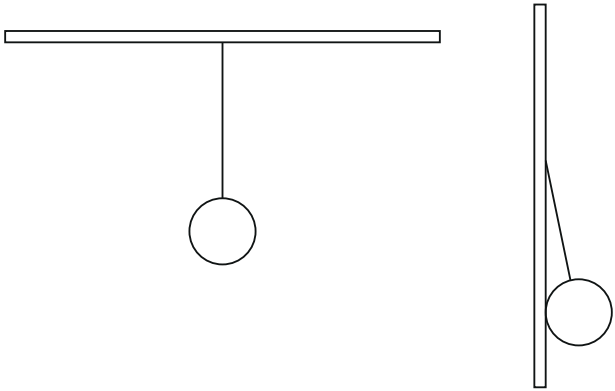
Шар на доске: вертикальная и горизонтальная

Задача 3. [ИОШ 2022/23, отборочный этап, 11 класс, задача 3] К очень длинной гладкой горизонтальной доске с помощью невесомой нерастяжимой верёвки привязан массивный шар (см. левый рисунок). Как изменится сила натяжения верёвки — увеличится или уменьшится — если доску расположить вертикально? Во сколько раз изменится сила натяжения верёвки? Длина верёвки в 3 раза больше радиуса шара.



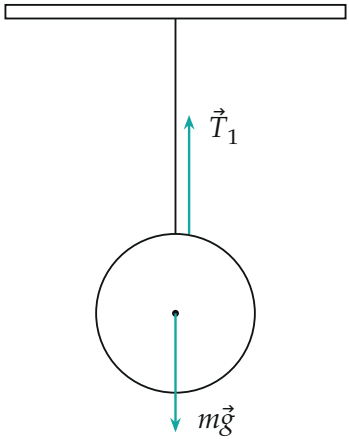
▲ **Решение.** **Что происходит.** Шар в покое, значит, сумма сил на него равна нулю. На горизонтальной доске шар просто висит: верёвка вертикальна и держит только вес. У вертикальной доски шар прижат к ней, и доска давит на шар горизонтально; верёвка наклоняется, и её натяжение, кроме веса, уравновешивает ещё и давление доски — значит, натяжение *растёт*. Задача на равновесие тела под действием трёх сил.

Обозначения. m — масса шара, R — его радиус, $L = 3R$ — длина верёвки; T_1 и T_2 — натяжение верёвки у горизонтальной и вертикальной доски; $\vec{N}$ — сила реакции вертикальной доски; α — угол верёвки с вертикалью (с доской) во втором случае.

1. Горизонтальная доска. На шар действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и натяжение $\vec{T}_1$, обе вертикальны. Условие равновесия шара (первый закон Ньютона) в проекции на вертикаль:

$$T_1 - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1 = mg.$$

Шар доски не касается, и других сил нет.

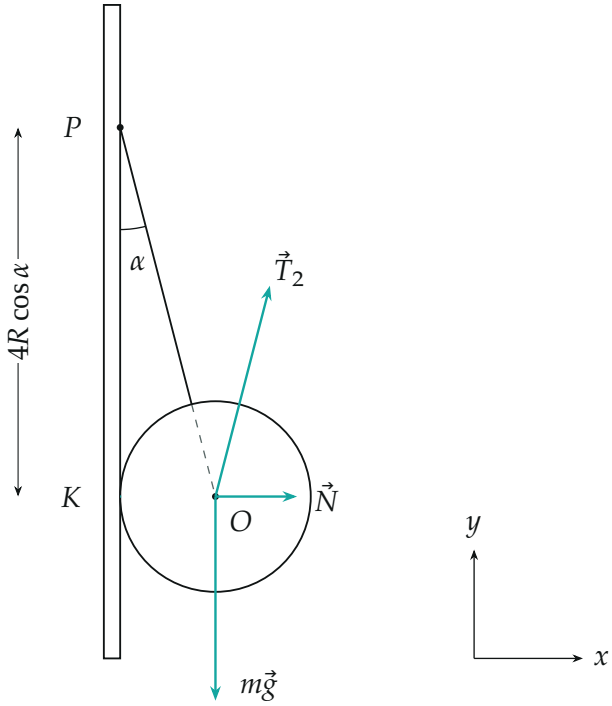


Горизонтальная доска: две силы вдоль одной вертикали, $T_1 = mg$. Стрелка $\vec{T}_1$ сдвинута вбок от верёвки, чтобы не сливаться с ней.

2. Вертикальная доска: куда смотрят силы. Доска гладкая, поэтому её сила реакции $\vec{N}$ перпендикулярна доске, то есть горизонтальна, и приложена в точке касания K; линия её действия проходит через центр шара O. Сила тяжести тоже проходит через O. Шар в равновесии под действием трёх сил, поэтому и момент сил относительно O равен нулю: натяжение тоже должно проходить через O. Значит, верёвка направлена точно на центр шара, и продолжение верёвки — это радиус.

3. Геометрия. Расстояние от точки крепления P до центра шара равно длине верёвки плюс радиус: $PO = L + R = 4R$. Центр шара отстоит от доски на R (шар касается доски). В прямоугольном треугольнике POK (K — точка касания, $OK \perp$ доске):

$$\sin\alpha = \frac{R}{4R} = \frac{1}{4}, \qquad \cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$



Вертикальная доска. Верёвка P — шар и её продолжение (пунктир) проходят через центр O; $PO = L + R = 4R$, $OK = R$. Силы приложены к шару: $\vec{N}$ горизонтальна, $\vec{T}_2$ — вдоль верёвки.

4. Равновесие во втором случае. Первый закон Ньютона для шара векторно:

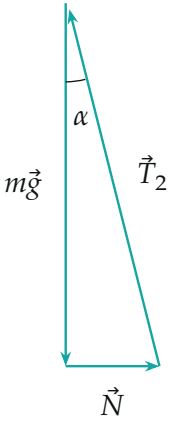
$$\vec{T}_2 + \vec{N} + m\vec{g} = 0.$$

Ось y — вверх, ось x — от доски. В проекции на y сила $\vec{N}$ выпадает (она горизонтальна), поэтому с этой оси и начнём:

$$y:\ T_2\cos\alpha - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad T_2 = \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{4mg}{\sqrt{15}};$$

$$x:\ N - T_2\sin\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg\ \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{mg}{\sqrt{15}}.$$

$T_2 > T_1$: натяжение увеличилось.



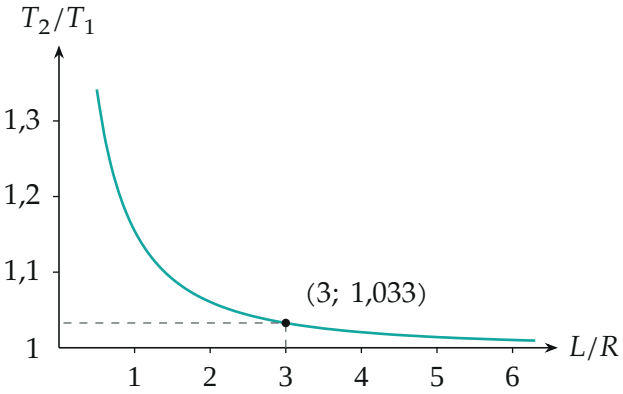
Треугольник сил: три силы в сумме дают ноль, поэтому, отложенные друг за другом, они замыкаются. T_2 — гипотенуза, mg — катет, $T_2 = mg/\cos\alpha$.

Обратите внимание. Нельзя брать угол из треугольника со стороной $L = 3R$: верёвка лежит на прямой, проходящей через центр шара, и гипотенуза — это $L + R = 4R$, а катет — радиус R (расстояние от доски до центра).

5. Во сколько раз.

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{4}{\sqrt{15}} \approx 1{,}03.$$

Натяжение растёт всего на 3 %: верёвка длинная по сравнению с шаром и почти вертикальна.



Отношение натяжений $T_2/T_1 = 1/\sqrt{1 - R^2/(L+R)^2}$ в зависимости от длины верёвки. Чем короче верёвка, тем сильнее она наклонена и тем больше выигрыш; точка задачи — $L = 3R$.

Соберём ответ: натяжение увеличится,

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{L+R}{\sqrt{(L+R)^2 - R^2}} = \frac{4}{\sqrt{15}} \approx 1{,}03.$$

Проверка. Размерность: отношение безразмерно. Предел: при $L \gg R$ верёвка вертикальна, $T_2/T_1 \to 1$ — доска почти не давит. Второй способ — треугольник сил: гипотенуза T_2, катет mg, угол между ними α, $T_2 = mg/\cos\alpha$ — то же. Физический смысл: доска отталкивает шар вбок, и верёвка должна держать не только вес, но и этот боковой толчок.

Ответ. Увеличится в $\dfrac{4}{\sqrt{15}} \approx 1{,}03$ раза.