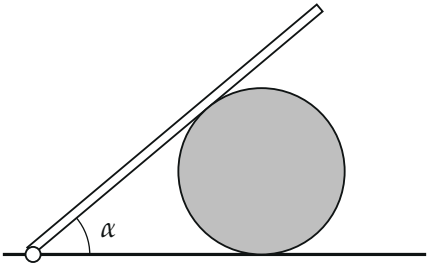
Стержень на шаре с трением

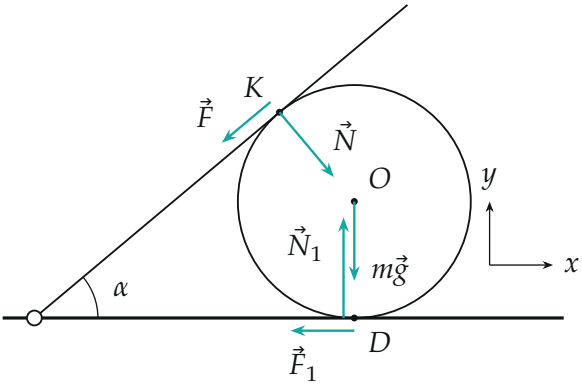
Задача 4. [ИОШ 2022/23, отборочный этап, 11 класс, задача 4] Массивный стержень шарнирно закреплён на горизонтальной поверхности. Стержень опирается на массивный шар, лежащий на этой поверхности (см. рисунок). При каких углах α между стержнем и поверхностью система будет находиться в равновесии, если коэффициенты трения стержня о шар и шара о поверхность одинаковы и равны μ? Трением качения пренебречь.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Стержень давит на шар и выталкивает его вправо; удерживают шар только силы трения — о стержень и о пол. Задача на предельное равновесие с трением: записываем условия равновесия шара (сумма сил и сумма моментов), находим нужные силы трения покоя и требуем, чтобы каждая не превышала μ, умноженного на свою силу нормального давления. Главная идея — уравнение моментов относительно центра шара: силы тяжести и нормальные реакции через центр проходят и в него не входят.

Обозначения. m — масса шара, r — его радиус, O — центр; K — точка касания со стержнем, D — с полом. N — сила нормального давления стержня на шар (зависит от массы стержня и угла, но, как увидим, выпадет); F — сила трения стержня о шар; N_1 и F_1 — нормальная реакция и сила трения пола. Ось x — вправо, y — вверх.

1. Силы на шар. $\vec{N}$ перпендикулярна стержню и направлена в центр шара; её проекции $(N\sin\alpha;\ -N\cos\alpha)$. Шар выталкивается вправо, поэтому трение пола $\vec{F}_1$ направлено влево. Трение стержня $\vec{F}$ направлено вдоль стержня вниз, к шарниру: проекции $(-F\cos\alpha;\ -F\sin\alpha)$. Если направления угаданы неверно, проекции выйдут отрицательными — но они выйдут положительными.



Силы, действующие на шар. $\vec{N}$ и $\vec{N}_1$ направлены по радиусам к центру, $m\vec{g}$ приложена в центре; силы трения $\vec{F}$ и $\vec{F}_1$ касательны к шару.

2. Моменты относительно центра шара. Шар в покое, поэтому сумма моментов сил относительно любой точки равна нулю. Возьмём O: $m\vec{g}, \vec{N}, \vec{N}_1$ проходят через O и моментов не дают. Остаются силы трения, обе касательны к шару и имеют плечо r, а вращают в разные стороны ($\vec{F}$ — против часовой стрелки, $\vec{F}_1$ — по часовой):

$$Fr - F_1 r = 0 \quad \Rightarrow \quad F_1 = F.$$

3. Силы. Первый закон Ньютона для шара $m\vec{g} + \vec{N} + \vec{N}_1 + \vec{F} + \vec{F}_1 = 0$ в проекциях:

$$x:\ N\sin\alpha - F\cos\alpha - F = 0, \qquad y:\ N_1 - mg - N\cos\alpha - F\sin\alpha = 0.$$

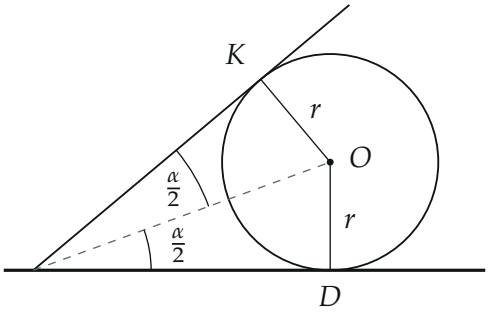
Из первого

$$F = \frac{N\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = N\ \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$$

(формулы половинного угла: $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$, $1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$). Из второго, подставив F,

$$N_1 = mg + N\cos\alpha + N\ \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\sin\alpha = mg + N.$$

$F > 0$: направление трения угадано верно.



Геометрия: центр шара лежит на биссектрисе угла α (пунктир), точки касания K и D симметричны. Радиусы OK и OD образуют угол $\pi - \alpha$, поэтому горизонтальные проекции двух сил трения складываются с множителем $1 + \cos\alpha$.

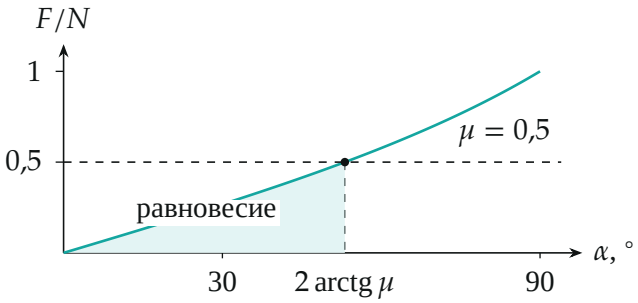
4. Условия отсутствия проскальзывания. Трение покоя не может превысить μ, умноженное на силу нормального давления в той же точке:

$$F \le \mu N \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \le \mu; \qquad F_1 \le \mu N_1 \quad \Leftrightarrow \quad N\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \le \mu(N + mg).$$

Второе условие слабее первого: $N + mg > N$. Значит, первым всегда нарушается первое — проскальзывание начинается между шаром и стержнем, а условие равновесия

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \le \mu \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \le 2\operatorname{arctg}\mu.$$

Ни масса стержня, ни масса шара в ответ не вошли: N сократилась.



Нужное отношение силы трения к давлению стержня $F/N = \operatorname{tg}(\alpha/2)$ растёт с углом. Равновесие возможно, пока кривая ниже уровня μ (пример $\mu = 0{,}5$, граница $\approx 53°$).

Обратите внимание. Сравнивать силу трения нужно с μ, умноженным на *свою* нормальную силу: в точке K это N, а в точке D — $N + mg$. Силы трения в двух точках одинаковы, а давления разные, поэтому срывается то место, где давление меньше, — контакт со стержнем. Шар при этом покатится по полу без проскальзывания (трение качения не учитываем), а стержень соскользнёт по нему.

5. Стержень. Равновесие стержня обеспечивает шарнир: сила трения $\vec{F}$ на стержень направлена вдоль него и момента относительно шарнира не даёт, а момент силы тяжести стержня уравновешивает давление шара N; реакция шарнира — какая потребуется. Поэтому других ограничений на α нет.

Соберём ответ:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \le \mu, \qquad \alpha \le 2\operatorname{arctg}\mu.$$

Проверка. Размерность: μ и tg безразмерны. Пределы: при $\mu \to 0$ равновесие только при $\alpha \to 0$ — без трения шар выдавливается при любом наклоне; при $\mu \to \infty$ подходит любой угол до π. Подстановка: при $\alpha = 60°$, $N = 1$ получаем $F = \operatorname{tg}30° = 0{,}577$, и проекция на x: $0{,}866 - 0{,}577 \cdot 0{,}5 - 0{,}577 = 0$. Второй способ для $F_1 = F$: моменты относительно точки K дали бы то же, но в них вошли бы mg и N_1, а через центр шара они выпадают — поэтому выбрана точка O. Физический смысл: чем круче стержень, тем сильнее он «выдавливает» шар, и тем большее трение нужно в точке K.

Ответ. $\alpha \le 2\operatorname{arctg}\mu$, то есть $\operatorname{tg}(\alpha/2) \le \mu$.