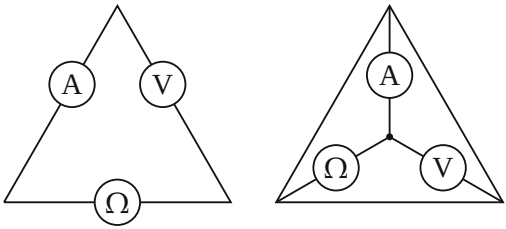
Приборы, соединённые треугольником и звездой

Задача 5. [ИОШ 2022/23, отборочный этап, 11 класс, задача 5] Когда амперметр, вольтметр и омметр соединены «треугольником» (левый рисунок), приборы показывают: амперметр — $I_1 = 1$ мА, вольтметр — $U_1 = 2$ В, омметр — $R_1 = 2200$ Ом. Какими будут показания вольтметра и омметра, если их соединить звездой (правый рисунок) и если известно, что при таком соединении амперметр показывает силу тока $I_2 = 3$ мА? Найти также внутренние сопротивления всех приборов.

Указание. Омметр представляет собой последовательно соединённые идеальный источник постоянного напряжения, резистор и идеальный амперметр. При подключении к внешнему резистору омметр измеряет силу тока и автоматически пересчитывает её в значение внешнего сопротивления.

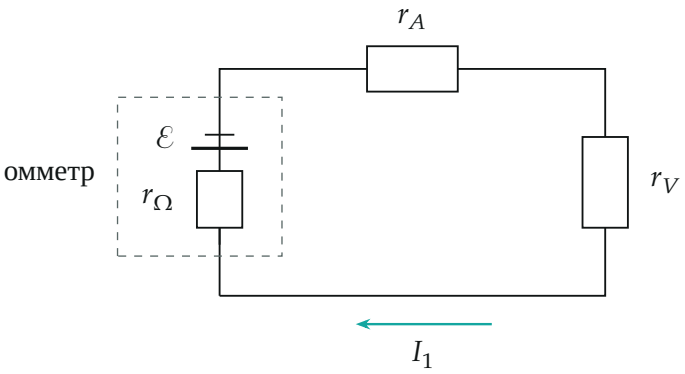


▲ **Решение. Что происходит.** Все три прибора — обычные резисторы со своими внутренними сопротивлениями, а омметр ещё и источник. Амперметр показывает ток через себя, вольтметр — напряжение на себе, омметр — сопротивление внешней цепи, подключённой к его клеммам. Задача на перерисовку схем в эквивалентные: в «треугольнике» все три прибора соединены последовательно, а в «звезде» стороны треугольника — провода, они соединяют внешние концы приборов в один узел, и все три прибора оказываются параллельно.

Обозначения. r_A, r_V, r_Ω — внутренние сопротивления амперметра, вольтметра и омметра; $\mathcal{E}$ — напряжение источника омметра; U_2 и R_2 — искомые показания вольтметра и омметра при соединении звездой.

1. Треугольник: эквивалентная схема. По замкнутому контуру омметр — амперметр — вольтметр течёт один ток I_1: приборы соединены

последовательно, а внешняя для омметра цепь — это амперметр и вольтметр подряд.



Треугольник: омметр (источник $\mathcal{E}$ и резистор r_Ω, пунктирная рамка) питает последовательно соединённые амперметр и вольтметр; ток I_1 один на весь контур.

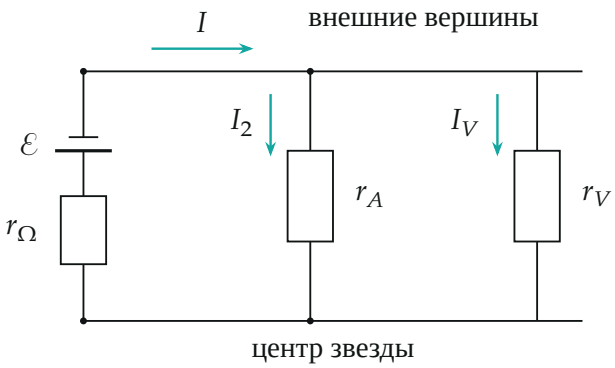
2. Сопротивления вольтметра и амперметра. По закону Ома для вольтметра (напряжение на нём U_1, ток через него I_1):

$$r_V = \frac{U_1}{I_1} = \frac{2\ \text{В}}{10^{-3}\ \text{А}} = 2000\ \text{Ом}.$$

Омметр показывает сопротивление внешней цепи — последовательно соединённых амперметра и вольтметра: $R_1 = r_A + r_V$, откуда

$$r_A = R_1 - \frac{U_1}{I_1} = 2200 - 2000 = 200\ \text{Ом}.$$

3. Звезда: эквивалентная схема. Стороны внешнего треугольника — провода; они соединяют три внешних конца приборов в один узел. Вторые концы сходятся в центре звезды. Значит, все три прибора включены между двумя узлами, то есть параллельно: омметр питает параллельно соединённые амперметр и вольтметр.



Звезда после перерисовки: три прибора между двумя узлами — параллельно. Ток омметра I делится на ток амперметра I_2 и ток вольтметра I_V.

4. Показание вольтметра. Вольтметр и амперметр параллельны, напряжение на них одно и то же. По закону Ома для амперметра

$$U_2 = I_2 r_A = 3 \cdot 10^{-3} \cdot 200 \text{ В} = 0{,}6 \text{ В}.$$

5. Показание омметра. Внешняя для омметра цепь — r_A и r_V параллельно:

$$R_2 = \frac{r_A r_V}{r_A + r_V} = \frac{200 \cdot 2000}{2200} \text{ Ом} \approx 182 \text{ Ом}.$$

6. Сопротивление омметра. Закон Ома для полной цепи омметра в каждом опыте: напряжение источника равно сумме напряжений на r_Ω и на внешней цепи. Треугольник: ток I_1, внешнее напряжение $I_1 R_1$:

$$\mathcal{E} = I_1 r_\Omega + I_1 R_1.$$

Звезда: через омметр идёт ток $I = I_2 + I_V = I_2 + \dfrac{U_2}{r_V} = 3 + 0{,}3 = 3{,}3$ мА, внешнее напряжение U_2:

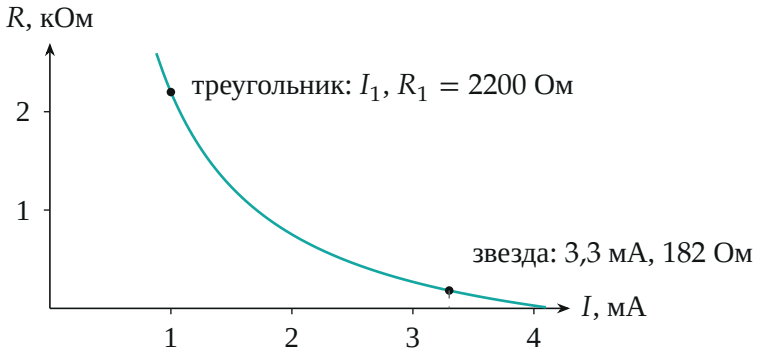
$$\mathcal{E} = I\, r_\Omega + U_2.$$

Неизвестные $\mathcal{E}$ и r_Ω; вычтем одно уравнение из другого, чтобы исклю-

чить $\mathcal{E}$:

$$r_\Omega = \frac{I_1R_1 - U_2}{I - I_1} = \frac{2{,}2 - 0{,}6}{(3{,}3 - 1)\cdot 10^{-3}}\ \text{Ом} = \frac{1{,}6}{2{,}3\cdot 10^{-3}}\ \text{Ом} \approx 696\ \text{Ом}.$$

Попутно $\mathcal{E} = I_1(r_\Omega + R_1) \approx 2{,}90$ В.



Шкала омметра $R = \mathcal{E}/I - r_\Omega$ при найденных $\mathcal{E} \approx 2{,}90$ В и $r_\Omega \approx 696$ Ом. Обе точки опыта лежат на этой кривой.

Обратите внимание. В звезде омметр питает *оба* прибора, поэтому его ток — не I_2, а $I_2 + U_2/r_V = 3{,}3$ мА. Подставив I_2, получим неверное $r_\Omega = 800$ Ом.

Соберём ответ:

$$U_2 = \left(R_1 - \frac{U_1}{I_1}\right) I_2 = 0{,}6\ \text{В}, \qquad R_2 = \frac{U_1\,(R_1I_1 - U_1)}{R_1I_1^2} \approx 182\ \text{Ом},$$

$$r_V = \frac{U_1}{I_1} = 2000\ \text{Ом}, \qquad r_A = R_1 - \frac{U_1}{I_1} = 200\ \text{Ом},$$

$$r_\Omega = \frac{U_1\,[R_1I_1(I_1 - I_2) + U_1I_2]}{I_1^2\,(I_2R_1 - U_1)} \approx 696\ \text{Ом}.$$

Проверка. Размерности: Ом, В — верно. Омметр сам должен «пересчитать» ток 3,3 мА в сопротивление: $\mathcal{E}/I - r_\Omega = 2{,}896/0{,}0033 - 696 \approx 182$ Ом — совпадает с R_2, найденным по схеме (второй способ). Общая формула для r_Ω при наших числах: $2\cdot[2{,}2\cdot(1-3)+2\cdot 3]/[1\cdot(6{,}6-2)] =$

$2 \cdot 1{,}6/4{,}6 \approx 0{,}696$ кОм (токи в мА, сопротивления в кОм). Физический смысл: в звезде амперметр шунтирует вольтметр, поэтому вольтметр показывает только 0,6 В.

Ответ. $U_2 = 0{,}6$ В, $R_2 \approx 182$ Ом; $r_A = 200$ Ом, $r_V = 2000$ Ом, $r_\Omega \approx 696$ Ом.