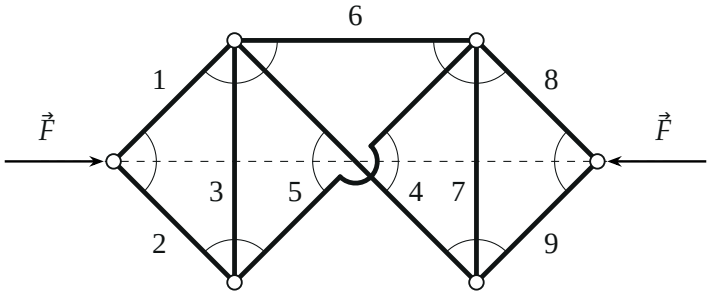
Ферма из девяти стержней

Задача 6. [ИОШ 2022/23, отборочный этап, 11 класс, задача 6] Девять жёстких невесомых стержней связаны невесомыми шарнирами. На два крайних шарнира действуют одинаковые по величине силы $\vec{F}$, направленные противоположно вдоль одной прямой. Все углы, отмеченные на рисунке дугами, равны 45°. Определить силы натяжения стержней F_1, F_2, … F_9. Какие из стержней будут растянуты, какие сжаты? Считать, что стержни 4 и 5 посередине системы не касаются друг друга и никак друг на друга не влияют (на рисунке это показано разрывом одного из стержней).



▲ **Решение. Что происходит.** Конструкция в покое, и каждый шарнир тоже: сумма сил, приложенных к шарниру, равна нулю. Стержни невесомы и соединены шарнирами, поэтому каждый стержень действует на шарнир только вдоль себя (тянет к себе, если растянут, толкает, если сжат). Это задача о ферме: идём от шарнира к шарниру, начиная с того, где неизвестных меньше всего, и пользуемся симметрией.

Обозначения. Шарниры: L — левый, A — верхний левый, B — нижний левый, C — верхний правый, D — нижний правый, R — правый. Стержни: 1 — LA, 2 — LB, 3 — AB, 4 — AD, 5 — BC, 6 — AC, 7 — CD, 8 — CR, 9 — DR. T_i — натяжение стержня i со знаком: каждый стержень *предполагаем растянутым* (он тянет шарнир вдоль себя), и $T_i < 0$ будет означать, что стержень сжат; $F_i = |T_i|$. Ось x — вправо, y — вверх; все наклонные стержни идут под 45°, проекции их сил — $T_i/\sqrt{2}$.

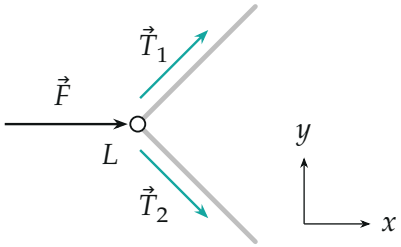
1. Шарнир L**.** На него действуют внешняя сила F (вправо) и стержни 1 и 2. Первый закон Ньютона для шарнира в проекциях:

$$y:\ \frac{T_1}{\sqrt{2}} - \frac{T_2}{\sqrt{2}} = 0, \qquad x:\ F + \frac{T_1}{\sqrt{2}} + \frac{T_2}{\sqrt{2}} = 0.$$

Отсюда

$$T_1 = T_2 = -\frac{F}{\sqrt{2}}:$$

стержни 1 и 2 сжаты, $F_1 = F_2 = F/\sqrt{2}$.



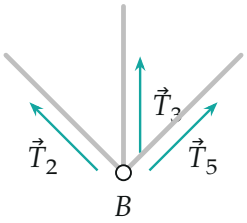
Шарнир L. Силы стержней нарисованы в предположении, что стержни растянуты (тянут шарнир вдоль себя); найденный знак минус переворачивает обе стрелки — стержни сжаты.

2. Шарнир B**.** Стержни 2 (к L, вверх-влево), 3 (к A, вверх) и 5 (к C, вверх-вправо):

$$x:\ -\frac{T_2}{\sqrt{2}} + \frac{T_5}{\sqrt{2}} = 0 \ \Rightarrow\ T_5 = T_2 = -\frac{F}{\sqrt{2}},$$

$$y:\ \frac{T_2}{\sqrt{2}} + T_3 + \frac{T_5}{\sqrt{2}} = 0 \ \Rightarrow\ T_3 = F.$$

Стержень 5 сжат, стержень 3 растянут.



Шарнир B: три стержня, два неизвестных натяжения (T_2 уже найдено).

3. Симметрия «лево — право». Конструкция и нагрузка переходят в себя при зеркальном отражении относительно вертикали через середину: $A \leftrightarrow C$, $B \leftrightarrow D$, $L \leftrightarrow R$, стержни $1 \leftrightarrow 8$, $2 \leftrightarrow 9$, $3 \leftrightarrow 7$, $4 \leftrightarrow 5$, а стержень 6 переходит сам в себя. Поэтому

$$T_8 = T_1, \quad T_9 = T_2, \quad T_7 = T_3 = F, \quad T_4 = T_5 = -\frac{F}{\sqrt{2}}.$$

Симметрии «верх — низ» нет: сверху стоит стержень 6, снизу его нет. Поэтому его натяжение нужно найти, а не угадать.

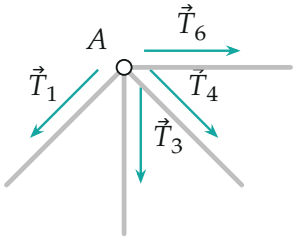
4. Шарнир A. Стержни 1 (к L, вниз-влево), 3 (к B, вниз), 4 (к D, вниз-вправо), 6 (к C, вправо):

$$x: \ -\frac{T_1}{\sqrt{2}} + \frac{T_4}{\sqrt{2}} + T_6 = 0 \ \Rightarrow \ T_6 = \frac{T_1 - T_4}{\sqrt{2}} = 0.$$

Стержень 6 не нагружен. Проекция на y даёт проверку — в неё входят только уже найденные величины:

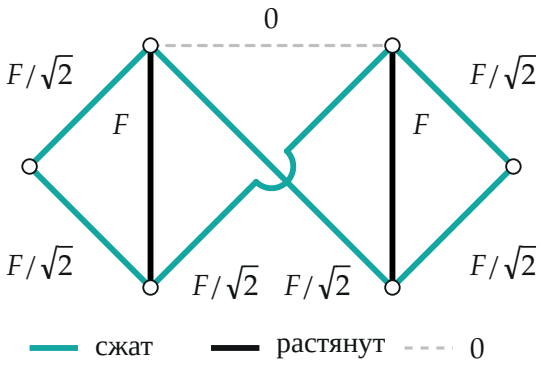
$$y: \ -\frac{T_1}{\sqrt{2}} - T_3 - \frac{T_4}{\sqrt{2}} = \frac{F}{2} - F + \frac{F}{2} = 0.$$

Сходится.



Шарнир A: горизонтальные проекции сил стержней 1 и 4 одинаковы и противоположны, поэтому стержню 6 уравновешивать нечего.

Обратите внимание. Сжатый стержень не «тянет», а толкает шарнир. Чтобы не ошибиться в направлениях, все стержни считаются растянутыми, а знак ответа сам говорит, что стержень сжат: здесь $T_1 < 0$, и толкающие силы стержней 1 и 4 у шарнира A направлены вверх, а растянутый стержень 3 тянет вниз.



Итог: бирюзовые стержни сжаты силой $F/\sqrt{2}$, чёрные растянуты силой F, стержень 6 не нагружен.

Соберём ответ:

$$F_1 = F_2 = F_4 = F_5 = F_8 = F_9 = \frac{F}{\sqrt{2}} \text{ (сжаты)},$$

$$F_3 = F_7 = F \text{ (растянуты)}, \qquad F_6 = 0.$$

Проверка. Размерность: все натяжения выражены через F. Число уравнений: 6 шарниров дают 12 уравнений, три из них — равновесие

конструкции в целом (выполнено: внешние силы $\vec{F}$ и $-\vec{F}$ на одной прямой), остаётся 9 на 9 неизвестных — ферма статически определима; численное решение всей системы 12 уравнений даёт те же числа. Независимая проверка — уравнение y для шарнира A (пункт 4) выполнено тождественно. Физический смысл: сжимающие силы F передаются по двум «ромбам» из наклонных стержней, а вертикальные стержни 3 и 7 стягивают вершины ромбов, не давая им сплющиться.

Ответ. Стержни 1, 2, 4, 5, 8, 9 сжаты, $F_1 = F_2 = F_4 = F_5 = F_8 = F_9 = F/\sqrt{2}$; стержни 3 и 7 растянуты, $F_3 = F_7 = F$; стержень 6 не нагружен, $F_6 = 0$.