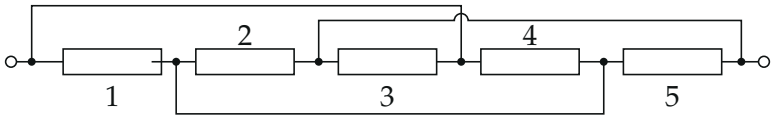
Сопротивление цепи из пяти резисторов

Задача 3. [ИОШ 2022/23, отборочный этап, 9 класс, задача 3] Найдите сопротивление электрической цепи, изображённой на рисунке. Сопротивление резисторов таковы: $r_1 = r_2 = r_4 = r_5 = r$, $r_3 = 2r$. Сопротивление соединительных проводов мало.



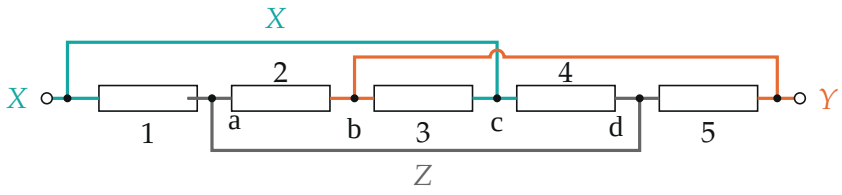
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на эквивалентную схему. Провода без сопротивления соединяют точки с одинаковым потенциалом, поэтому всё, что соединено проводом, — один узел. Если пометить узлы и перерисовать схему, она распадётся на последовательные и параллельные соединения.

Обозначения. Левый зажим — X, правый — Y; R — искомое сопротивление между X и Y. Точки на основной линии: между резисторами 1 и 2 — точка a, между 2 и 3 — b, между 3 и 4 — c, между 4 и 5 — d.

1. Находим узлы. Проследим провода.

- Верхний провод идёт от левого зажима X к точке c: c — это тот же узел X.
- Второй провод перепрыгивает через первый (дужка — пересечение без соединения) и соединяет точку b с правым зажимом: b — это узел Y.
- Нижний провод соединяет точки a и d: это один узел, назовём его Z.

Итого узлов три: X, Y, Z.

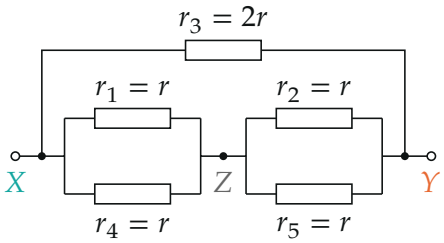


Узлы схемы: всё бирюзовое — узел X, морковное — узел Y, серое — узел Z. На дужке провода Y и X пересекаются без соединения.

2. Какие резисторы между какими узлами. Читаем концы каждого резистора:

$$r_1:\ X{-}Z, \qquad r_2:\ Z{-}Y, \qquad r_3:\ Y{-}X, \qquad r_4:\ X{-}Z, \qquad r_5:\ Z{-}Y.$$

Резисторы 1 и 4 соединяют одни и те же узлы — они параллельны; так же 2 и 5. Резистор 3 стоит прямо между зажимами.



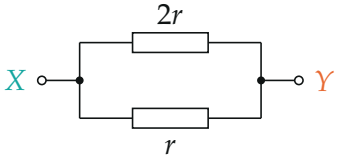
Та же цепь, перерисованная по узлам: сверху r_3 прямо между X и Y; снизу две параллельные пары последовательно через узел Z.

3. Сворачиваем. Два одинаковых резистора r параллельно дают $\frac{r\cdot r}{r+r} = \frac{r}{2}$. Нижняя ветвь — две такие пары последовательно:

$$R_{\text{низ}} = \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

Верхняя ветвь — $r_3 = 2r$. Ветви параллельны между X и Y:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2r} + \frac{1}{r} = \frac{3}{2r} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{2r}{3}.$$



После свёртки: $2r$ и r параллельно, $R = \frac{2r}{3}$.

Обратите внимание. Дужка на пересечении проводов означает, что провода *не* соединены. Если по ошибке соединить их в этой точке, оба зажима замкнутся проводом и сопротивление станет нулевым.

Проверка. Подадим между X и Y напряжение U. Через r_3 течёт $\frac{U}{2r}$. По симметрии нижней ветви потенциал Z — ровно посередине, на каждом из резисторов 1, 2, 4, 5 напряжение $\frac{U}{2}$ и ток $\frac{U}{2r}$; из X в нижнюю ветвь уходит $2 \cdot \frac{U}{2r} = \frac{U}{r}$. Полный ток $\frac{U}{2r} + \frac{U}{r} = \frac{3U}{2r}$, $R = \frac{U}{I} = \frac{2r}{3}$ — то же. Предел: R меньше каждой из параллельных ветвей ($2r$ и r), как и должно быть.

Ответ. $R = \dfrac{2r}{3}$.