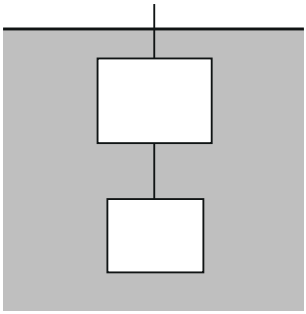
Контейнеры на тросах под водой

Задача 4. [ИОШ 2022/23, отборочный этап, 9 класс, задача 4] Для доставки оборудования водолазам, работающим в водолазном колоколе, два контейнера с грузом связали тросом и за один из контейнеров привязали к ещё одному тросу. Известно, что сила натяжения верхнего троса в два раза больше силы натяжения троса, связывающего контейнеры. Когда контейнеры опустили в воду (см. рисунок), сила натяжения верхнего троса уменьшилась (по сравнению со случаем, когда трос и контейнеры были на воздухе) в $n = 1{,}2$ раза, нижнего — в $k = 1{,}3$ раза. Найти средние плотности верхнего и нижнего контейнеров. Плотность воды $\rho_0 = 1000$ кг/м^3.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равновесие тел в жидкости и закон Архимеда. Контейнеры висят неподвижно, поэтому для каждого сумма сил равна нулю — и в воздухе, и в воде. В воде добавляется выталкивающая сила, она и уменьшает натяжения тросов. Нижний трос держит только нижний контейнер, поэтому из его натяжения сразу находится плотность нижнего; верхний трос держит оба, и для него придётся учесть, что нижний трос в воде тоже ослаб.

Обозначения. Верхний контейнер — масса m_1, объём V_1, плотность $\rho_1 = \frac{m_1}{V_1}$; нижний — m_2, V_2, ρ_2. Натяжения в воздухе: верхнего троса T_1, нижнего T_2; в воде — $T_1' = \frac{T_1}{n}$ и $T_2' = \frac{T_2}{k}$. Ось y — вверх. Тросы тонкие: их вес и выталкивающую силу на них, а также выталкивающую силу воздуха не учитываем.

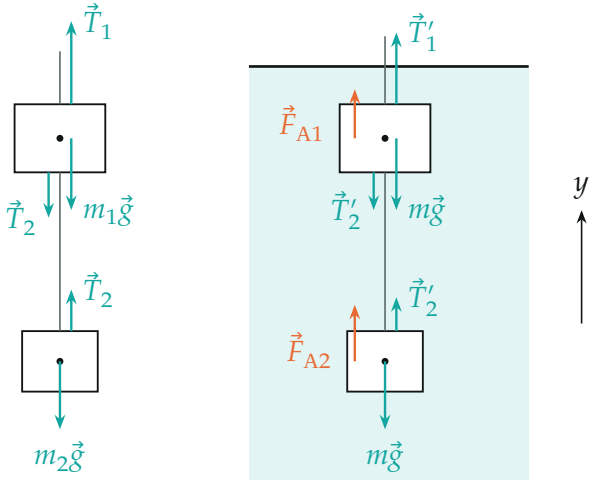
1. Равновесие в воздухе. Второй закон Ньютона (при $\vec{a} = 0$) для нижнего контейнера в проекции на ось y: на него действуют трос вверх и тяжесть вниз,

$$T_2 - m_2 g = 0 \quad \Rightarrow \quad T_2 = m_2 g.$$

Для верхнего контейнера: верхний трос тянет вверх, нижний трос — вниз, тяжесть — вниз,

$$T_1 - T_2 - m_1 g = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1 = m_1 g + m_2 g.$$

По условию $T_1 = 2T_2$, откуда $m_1 g + m_2 g = 2m_2 g$, то есть $m_1 = m_2$: контейнеры одинаковой массы. Обозначим $m_1 = m_2 = m$; тогда $T_2 = mg$, $T_1 = 2mg$.



в воздухе в воде

Силы на контейнеры в воздухе и в воде. В воде добавляются выталкивающие силы $\vec{F}_A$ (морковные), натяжения тросов уменьшаются. Тросы — серые линии.

2. Нижний контейнер в воде. На него действует ещё сила Архимеда $F_{A2} = \rho_0 g V_2$ вверх. Равновесие в проекции на y:

$$T'_2 + \rho_0 g V_2 - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad T'_2 = mg - \rho_0 g V_2 = mg\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_2}\right),$$

где учтено $V_2 = \frac{m}{\rho_2}$. Натяжение уменьшилось в k раз:

$$k = \frac{T_2}{T_2'} = \frac{1}{1 - \rho_0/\rho_2} = \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_0}$$

$$\rho_2 = \frac{k\rho_0}{k-1} = \frac{1{,}3 \cdot 1000}{0{,}3}\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \approx 4333\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

3. Верхний контейнер в воде. На него действуют верхний трос T_1' вверх, сила Архимеда $\rho_0 g V_1$ вверх, тяжесть mg и нижний трос T_2' — вниз. Нижний трос в воде натянут уже слабее, $T_2' = \frac{mg}{k}$:

$$T_1' + \rho_0 g V_1 - mg - \frac{mg}{k} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1' = mg\left(1 + \frac{1}{k} - \frac{\rho_0}{\rho_1}\right).$$

Натяжение верхнего троса уменьшилось в n раз: $T_1' = \frac{T_1}{n} = \frac{2mg}{n}$. Приравняем и сократим mg:

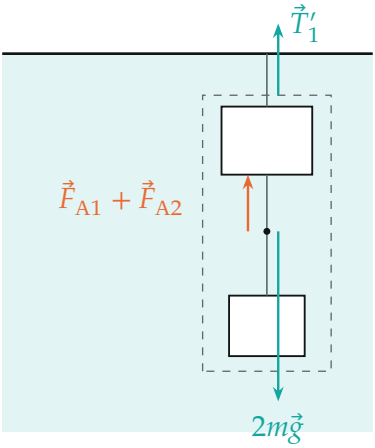
$$1 + \frac{1}{k} - \frac{\rho_0}{\rho_1} = \frac{2}{n} \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho_0}{\rho_1} = 1 + \frac{1}{k} - \frac{2}{n} = \frac{nk + n - 2k}{nk}.$$

$$\rho_1 = \frac{nk\,\rho_0}{nk + n - 2k} = \frac{1{,}56 \cdot 1000}{1{,}56 + 1{,}2 - 2{,}6}\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} = \frac{1560}{0{,}16}\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} = 9750\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Второй способ для верхнего троса — система целиком. Возьмём оба контейнера вместе с нижним тросом как одно тело. Нижний трос тогда — внутренняя сила и выпадает. Внешние силы: верхний трос, тяжесть $2mg$ и две выталкивающие силы:

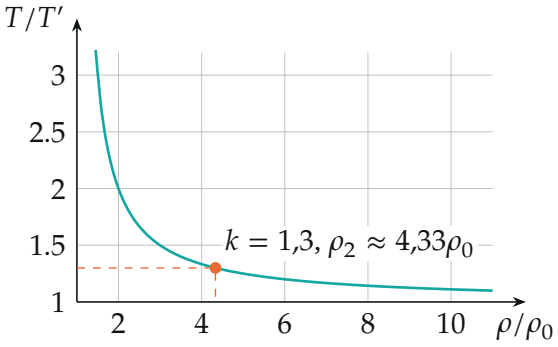
$$T_1' = 2mg - \rho_0 g(V_1 + V_2) = mg\left(2 - \frac{\rho_0}{\rho_1} - \frac{\rho_0}{\rho_2}\right).$$

С $\frac{\rho_0}{\rho_2} = 1 - \frac{1}{k}$ из пункта 2 и $T_1' = \frac{2mg}{n}$ получаем $\frac{\rho_0}{\rho_1} = 1 + \frac{1}{k} - \frac{2}{n}$ — то же уравнение.



Система «два контейнера + нижний трос» (штриховая рамка): натяжение нижнего троса — внутренняя сила и в уравнение не входит.

4. Как плотность связана с ослаблением троса. Для одного тела на тросе $\frac{T}{T'} = \frac{\rho}{\rho-\rho_0}$: чем плотнее тело, тем меньше в воде теряет натяжение. Для нижнего контейнера это кривая на рисунке, $k = 1{,}3$ даёт $\rho_2 \approx 4{,}33\rho_0$. У верхнего троса ослабление меньше ($n = 1{,}2 < k$), потому что верхний контейнер плотнее.



Во сколько раз в воде ослабевает трос, держащий одно тело, в зависимости от плотности тела: $T/T' = \frac{\rho}{\rho-\rho_0}$. Точка — нижний контейнер.

Обратите внимание. Верхний трос держит оба контейнера, но n *не* равно k и не выражается только через ρ_1: в воде ослаб и нижний трос,

который тянет верхний контейнер вниз. Именно поэтому в уравнении пункта 3 стоит mg/k, а не mg. И ещё: из $m_1 = m_2$ при $\rho_1 > \rho_2$ следует $V_1 < V_2$ — верхний контейнер по объёму меньше нижнего; рисунок условия схематичен.

Проверка. Размерность: ρ_1 и ρ_2 выражены через ρ_0 и безразмерные n, k. Подстановка (python): при $m = 1$ кг $V_2 = 2{,}308 \cdot 10^{-4}$ м^3, $V_1 = 1{,}026 \cdot 10^{-4}$ м^3; $T_2' = 9{,}8 - 2{,}262 = 7{,}538$ Н, $T_2/T_2' = 1{,}300$; $T_1' = 9{,}8 + 7{,}538 - 1{,}005 = 16{,}33$ Н, $T_1/T_1' = 19{,}6/16{,}33 = 1{,}200$ — оба отношения совпали с условием. Предел: при $k \to \infty$ (нижний трос в воде не тянет) $\rho_2 \to \rho_0$ — нижний контейнер плавает в толще воды, как и должно быть.

Ответ. Нижний контейнер: $\rho_2 = \dfrac{k\rho_0}{k-1} \approx 4333$ кг/м^3; верхний: $\rho_1 = \dfrac{nk\rho_0}{nk + n - 2k} = 9750$ кг/м^3.