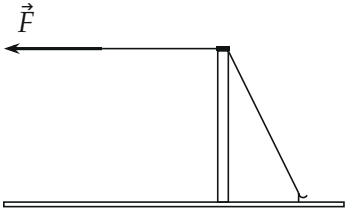
Нить на гвозде и стержне

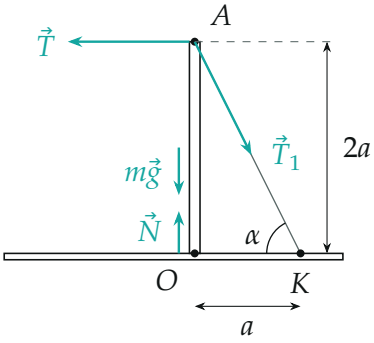
Задача 5. [ИОШ 2022/23, отборочный этап, 9 класс, задача 5] На горизонтальной доске вертикально установили стержень, в верхнюю часть которого вбили гвоздь. На некотором расстоянии от гвоздя в доску вбили крючок. К крючку привязали конец нерастяжимой нити, которую затем намотали на гвоздь так, что участок нити от крючка до гвоздя натянут. Второй конец верёвки начали тянуть в горизонтальном направлении с увеличивающейся силой. Какая часть нити — до стержня или между стержнем и доской — порвётся первой? При каком значении силы F порвётся нить, если она выдерживает максимальную силу натяжения T_0? Расстояние от крючка до стержня вдвое меньше длины стержня. Нижний конец стержня не может скользить по доске.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равновесие тела с осью вращения (правило моментов). Нижний конец стержня не скользит, поэтому стержень может только поворачиваться вокруг него, как рычаг. Наверху на стержень действуют два участка нити: горизонтальный тянет влево, наклонный — вправо-вниз к крючку. Стержень не падает, если моменты этих сил относительно нижнего конца уравновешены. Нить намотана на гвоздь, поэтому натяжения двух участков могут быть разными; правило моментов покажет, какой больше.

Обозначения. O — нижний конец стержня, A — гвоздь, K — крючок; $OK = a$, длина стержня $OA = 2a$. T — натяжение горизонтального участка (равно приложенной силе F), T_1 — натяжение наклонного участка AK, α — угол между AK и горизонтом.

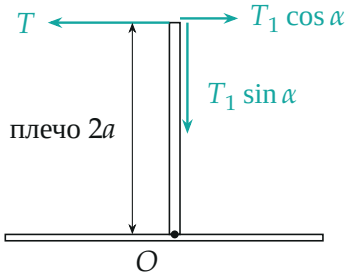
1. Силы на стержень. На стержень с гвоздём действуют: горизонтальный участок нити — сила T влево, наклонный — сила T_1 вдоль нити к крючку, тяжесть стержня и сила со стороны доски в точке O.



Силы на стержень: натяжения двух участков нити в точке A, тяжесть и реакция доски в O (у реакции может быть и горизонтальная составляющая — трение, оно не даёт концу скользить).

2. Правило моментов относительно O. Выберем ось вращения в точке O: тогда момент силы со стороны доски (какой бы она ни была) равен нулю, а сила тяжести вертикального стержня проходит через O и момента тоже не даёт. Разложим $\vec{T}_1$ на горизонтальную составляющую $T_1 \cos\alpha$ и вертикальную $T_1 \sin\alpha$. Вертикальная направлена вдоль стержня через O — плеча нет. Горизонтальные силы T и $T_1 \cos\alpha$ приложены на высоте $2a$ и поворачивают стержень в разные стороны:

$$T \cdot 2a = T_1 \cos\alpha \cdot 2a \quad \Rightarrow \quad T = T_1 \cos\alpha.$$



Разложение $\vec{T}_1$: горизонтальная составляющая $T_1 \cos\alpha$ имеет плечо $2a$ относительно O, вертикальная $T_1 \sin\alpha$ идёт вдоль стержня через O и момента не создаёт.

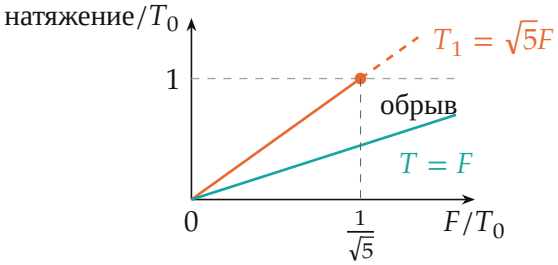
3. Угол. В прямоугольном треугольнике OAK катеты a и $2a$, гипотенуза по теореме Пифагора $AK = \sqrt{a^2 + 4a^2} = \sqrt{5}\,a$:

$$\cos\alpha = \frac{OK}{AK} = \frac{a}{\sqrt{5}\,a} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Значит, $T_1 = \dfrac{T}{\cos\alpha} = \sqrt{5}\,T \approx 2{,}24\,T$: наклонный участок натянут в $\sqrt{5}$ раз сильнее горизонтального.

4. Какой участок порвётся. Сила F растёт, вместе с ней растут $T = F$ и $T_1 = \sqrt{5}F$. Наклонный участок натянут сильнее и первым достигает предельного натяжения T_0 — порвётся часть нити между стержнем и доской. Это случится при

$$T_1 = \sqrt{5}F = T_0 \quad \Rightarrow \quad F = \frac{T_0}{\sqrt{5}} \approx 0{,}45\,T_0.$$



Натяжения участков нити при растущей силе F: наклонный участок (морковная прямая) достигает предела T_0 первым, при $F = T_0/\sqrt{5}$; горизонтальный в этот момент натянут лишь на $0{,}45\,T_0$.

Обратите внимание. Натяжение нити одинаково по всей длине, только если нить свободно скользит. Здесь нить намотана на гвоздь и удерживается им, поэтому натяжения участков по разные стороны гвоздя разные — их связывает равновесие стержня, а не «одна нить — одно натяжение». Второе: ось моментов в нижнем конце выбрана, чтобы неизвестная сила со стороны доски выпала из уравнения.

Проверка. Размерность: $[F] = [T_0]$. Знак: $T_1 > T$ при любом угле, потому что $\cos\alpha < 1$. Предел: если бы крючок был очень далеко ($\alpha \to 0$), $\cos\alpha \to 1$ и оба участка рвались бы почти одновременно; если крючок у самого стержня ($\alpha \to 90°$), $T_1 \to \infty$ при любой ненулевой F — нить почти вдоль стержня и горизонтально почти не тянет. Наш случай $\operatorname{tg}\alpha = 2$ — промежуточный.

Ответ. Первым порвётся участок нити между стержнем и доской (от гвоздя к крючку); это произойдёт при $F = \dfrac{T_0}{\sqrt{5}} \approx 0{,}45\,T_0$.