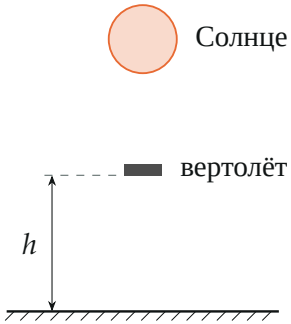
Тень от вертолёта

Задача 6. [ИОШ 2022/23, отборочный этап, 9 класс, задача 6] В ясную солнечную погоду в небо поднимается вертолёт. Оказалось, что вертолёт отбрасывает тень на землю, если высота его подъёма не превышает $h = 1$ км. При больших высотах тень от вертолёта пропадает. Считая, что угловой размер Солнца составляет $\Delta\alpha = 0{,}5°$, оцените размеры вертолёта. Считайте, что Солнце находится в зените (прямо над головой).



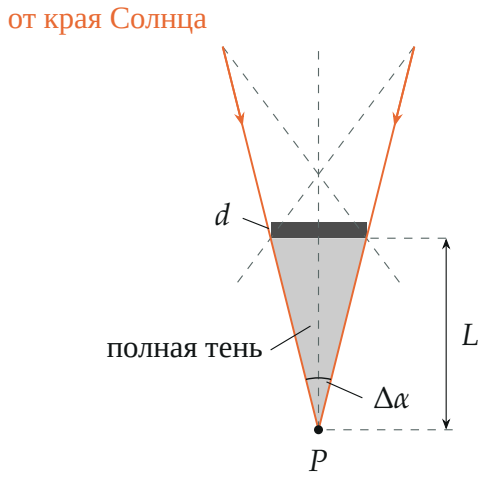
Поясняющий рисунок (не в масштабе): Солнце в зените, вертолёт на высоте h над землёй.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на тень от протяжённого источника света. Солнце — не точка, а диск с угловым размером $\Delta\alpha$, и лучи от разных его краёв идут под чуть разными углами. За непрозрачным телом образуется конус полной тени — область, куда не попадает свет ни от одной точки диска. Длина этого конуса тем больше, чем больше тело. Если земля дальше вершины конуса, на неё падает свет хотя бы от части диска, и чёткой тени нет. Граничная высота h — это и есть длина конуса тени.

Обозначения. d — размер вертолёта поперёк лучей (считаем его для оценки шаром диаметра d), L — длина конуса полной тени, $\Delta\alpha$ — угловой размер Солнца в радианах.

1. Конус полной тени. Проведём луч от левого края солнечного диска, касающийся левого края вертолёта, и луч от правого края диска, касающийся правого края вертолёта. Каждый из них наклонён к вертикали

на $\frac{\Delta\alpha}{2}$, и за вертолётом они сходятся в точке P. Внутри треугольника «вертолёт — P» не попадает свет ни от одной точки Солнца — это полная тень; вне него, но рядом — полутень, куда светит часть диска.



Конус полной тени за вертолётом (угол сильно преувеличен): лучи от противоположных краёв Солнца (морковные), касающиеся краёв вертолёта, сходятся в точке P под углом $\Delta\alpha$; серым — полная тень, штрих — границы полутени.

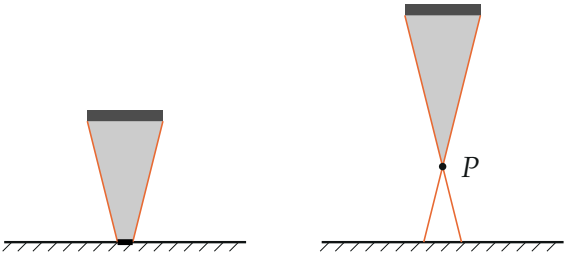
2. Длина конуса. В вершине P между двумя лучами угол $\Delta\alpha$ — такой же, как между направлениями на края Солнца. Половина основания треугольника $\frac{d}{2}$, высота L:

$$\operatorname{tg}\frac{\Delta\alpha}{2} = \frac{d/2}{L}.$$

Угол очень мал (0,5°), поэтому $\operatorname{tg}\frac{\Delta\alpha}{2} \approx \frac{\Delta\alpha}{2}$ (в радианах), и

$$L \approx \frac{d}{\Delta\alpha}.$$

3. Когда тень пропадает. Пока $h < L$, земля пересекает конус полной тени, и на ней тёмное пятно. При $h > L$ земля ниже вершины P: каждую точку земли освещает хоть часть диска, остаётся только слабая полутень, и тени глаз не видит. Граница — $h = L$:



Слева земля пересекает конус полной тени — на ней тёмное пятно; справа вершина P выше земли, за ней лучи расходятся, и под вертолётом лишь полутень.

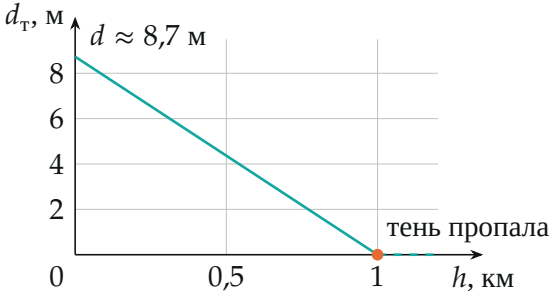
$$h = L = \frac{d}{\Delta\alpha} \quad \Rightarrow \quad d = h\,\Delta\alpha.$$

4. Число. Переведём угол в радианы: $\Delta\alpha = 0{,}5^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \approx 8{,}7 \cdot 10^{-3}$. Тогда

$$d = h\,\Delta\alpha \approx 10^3 \text{ м} \cdot 8{,}7 \cdot 10^{-3} \approx 9 \text{ м}.$$

Это оценка поперечного размера вертолёта — разумная для лёгкого вертолёта.

5. Как меняется тень с высотой. Размер полной тени на земле убывает линейно: из подобия $d_т = d - h\Delta\alpha$. У земли тень размером с вертолёт, на высоте 1 км она стягивается в точку.



Размер полной тени на земле в зависимости от высоты вертолёта: $d_m = d - h\Delta\alpha$, ноль при $h = 1$ км; дальше (штрих) полной тени нет.

Обратите внимание. В формуле $d = h\Delta\alpha$ угол — в радианах. Подстановка 0,5 «градусов» дала бы 500 м — бессмыслица. И ответ — только оценка: вертолёт не шар, а тень пропадает для глаза постепенно, по мере того как полутень светлеет.

Проверка. Размерность: $[h\Delta\alpha] =$ м (радиан безразмерен). Второй способ: с земли под вертолётом в момент исчезновения тени вертолёт виден под углом $\frac{d}{h}$ — и он как раз закрывает Солнце целиком, угловые размеры равны: $\frac{d}{h} = \Delta\alpha$. Такое же соотношение даёт солнечное затмение: Луна диаметром $3{,}5 \cdot 10^3$ км на расстоянии $3{,}8 \cdot 10^5$ км видна под углом $\approx 0{,}53^\circ$ — почти как Солнце, поэтому полная тень Луны едва достаёт до Земли.

Ответ. $d \approx h\,\Delta\alpha = 10^3$ м $\cdot\, 0{,}5 \cdot \dfrac{\pi}{180} \approx 9$ м (оценка размера вертолёта).