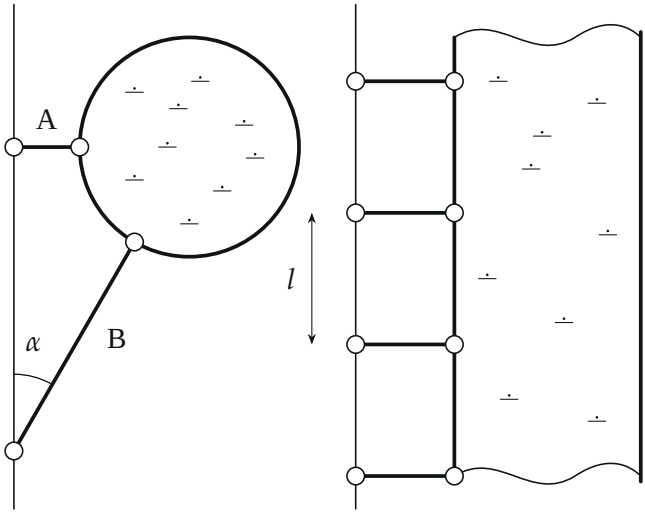
Труба с жидкостью на стержнях

Задача 1. [ИОШ 2022/23, 10 класс, задача 1] По трубопроводу диаметром d течёт жидкость плотности ρ. Труба трубопровода расположена горизонтально и прикреплена к вертикальной стене с помощью двух типов стержней, прикреплённых шарнирно к стене и трубе (см. правый рисунок; вид сбоку). Углы между стержнями первого типа (обозначены на левом рисунке буквой А) и стеной — прямые, стержни второго типа (буква В) составляют со стеной углы $\alpha = 30°$. Стержни располагаются через каждые l метров вдоль трубы (правый рисунок; вид сверху). Пренебрегая весом стержней и трубы по сравнению с весом жидкости, найти силы реакции стержней.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на равновесие тела под действием трёх сил. Стержни невесомые и прикреплены шарнирно с обоих концов — шарнир не передаёт момент, поэтому каждый стержень действует на трубу только вдоль самого себя. Труба с жидкостью покоится, значит, сумма трёх сил — веса жидкости и двух реакций — равна нулю. Направления реакций известны, неизвестны только модули: два уравнения в проекциях дают оба.

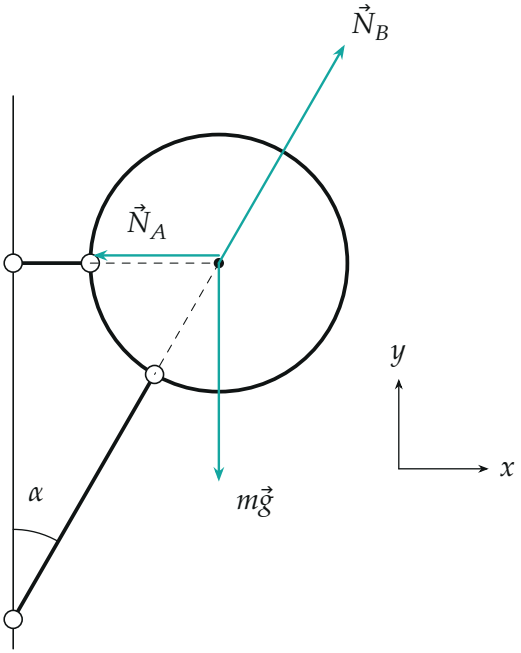
Обозначения. m — масса жидкости в куске трубы длиной l, который держит одна пара стержней A и B; $\vec{N}_A$, $\vec{N}_B$ — силы, с которыми на трубу действуют стержни; ось x — горизонтально от стены, ось y — вертикально вверх.

1. Какая масса приходится на одну пару стержней. Пары стержней стоят через каждые l вдоль трубы, поэтому каждая пара держит кусок трубы длиной l. Труба круглая диаметра d, сечение $S = \pi d^2/4$, масса жидкости в куске

$$m = \rho S l = \frac{1}{4}\rho\pi d^2 l.$$

Жидкость течёт, но равномерно и по горизонтальной прямой трубе: её импульс не меняется, и для равновесия трубы течение роли не играет — жидкость давит на трубу так же, как покоящаяся.

2. Куда направлены силы. Шарнирный невесомый стержень — тело, на которое действуют только две силы на концах; для его равновесия они должны быть направлены вдоль стержня навстречу друг другу. Значит, и сила, с которой стержень действует на трубу, направлена вдоль стержня. Стержень B идёт снизу от стены вверх к трубе и подпирает её: $\vec{N}_B$ направлена вдоль B вверх и от стены. У $\vec{N}_B$ есть горизонтальная составляющая от стены — её уравновешивает только стержень A, поэтому он тянет трубу к стене: стержень A растянут, $\vec{N}_A$ направлена горизонтально к стене. Сила тяжести $m\vec{g}$ приложена в центре трубы; линии действия всех трёх сил проходят через центр, поэтому моменты сил тоже уравновешены.



Силы, действующие на кусок трубы длиной l: все три приложены так, что их линии действия проходят через центр трубы.

3. Условие равновесия. Первый закон Ньютона для куска трубы с жидкостью:

$$m\vec{g} + \vec{N}_A + \vec{N}_B = 0.$$

Сила $\vec{N}_B$ составляет угол α с вертикалью (стержень B составляет угол α со стеной). Проекции на оси:

$$x:\ N_B \sin\alpha - N_A = 0, \qquad y:\ N_B \cos\alpha - mg = 0.$$

Из второго уравнения стержень B держит весь вес:

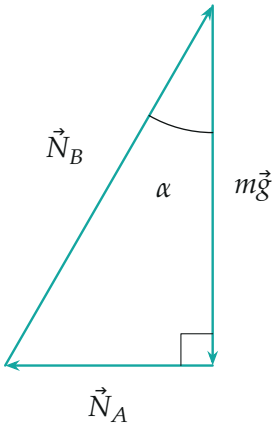
$$N_B = \frac{mg}{\cos\alpha},$$

из первого стержень A гасит горизонтальную составляющую силы $\vec{N}_B$:

$$N_A = N_B \sin\alpha = mg\ \mathrm{tg}\,\alpha.$$

Знаки: $N_A > 0$ и $N_B > 0$ — направления на рисунке угаданы верно: B сжат, A растянут.

4. Второй способ — треугольник сил. Три силы с нулевой суммой, отложенные одна за другой, образуют замкнутый треугольник. Он прямоугольный: $m\vec{g}$ вертикальна, $\vec{N}_A$ горизонтальна, $\vec{N}_B$ — гипотенуза, угол между $m\vec{g}$ и $\vec{N}_B$ равен α. Отсюда сразу $N_B = mg/\cos\alpha$, $N_A = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

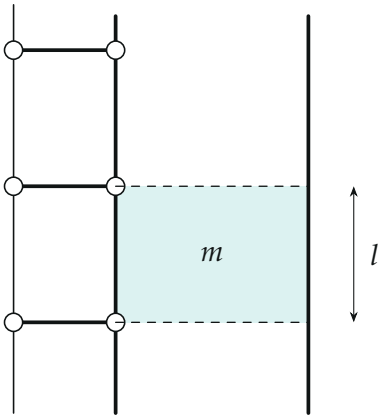


Замкнутый треугольник сил: $m\vec{g} + \vec{N}_A + \vec{N}_B = 0$.

5. Числа. При $\alpha = 30°$: $\mathrm{tg}\,\alpha = 1/\sqrt{3}$, $\cos\alpha = \sqrt{3}/2$. Подставляем $m = \rho\pi d^2 l/4$:

$$N_A = \frac{\rho\pi d^2 lg}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{12}\rho\pi d^2 lg, \qquad N_B = \frac{\rho\pi d^2 lg}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}\rho\pi d^2 lg.$$

Стержень B нагружен вдвое сильнее стержня A: $N_B/N_A = 1/\sin\alpha = 2$.



Вид сверху: каждая пара стержней держит кусок трубы длиной l с жидкостью массы $m = \rho\pi d^2 l/4$.

Обратите внимание. Стержни шарнирные с обоих концов, поэтому сила реакции стержня направлена строго вдоль него — это и делает задачу решаемой. Сила реакции стержня A не равна нулю, хотя он горизонтален: без него стержень B вытолкнул бы трубу от стены.

Ответ. $N_A = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{12}\rho\pi d^2 lg$ (стержень растянут), $N_B = \dfrac{mg}{\cos\alpha} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}\rho\pi d^2 lg$ (стержень сжат).

Проверка. Размерность: $[\rho d^2 lg] = \text{кг/м}^3 \cdot \text{м}^3 \cdot \text{м/с}^2 = \text{Н}$. Пределы: при $\alpha \to 0$ стержень B вертикален и держит трубу один, $N_B \to mg$, $N_A \to 0$; при $\alpha \to 90°$ стержень B горизонтален, вертикальную силу дать не может, и $N_B, N_A \to \infty$. Обе формулы ведут себя именно так.

Физический смысл. Наклонный подкос держит вес трубы и одновременно отталкивает её от стены; горизонтальная тяга удерживает трубу у стены.

Ответ. $N_A = \dfrac{\sqrt{3}}{12}\rho\pi d^2 lg$ (стержни A растянуты); $N_B = \dfrac{\sqrt{3}}{6}\rho\pi d^2 lg$ (стержни B сжаты).