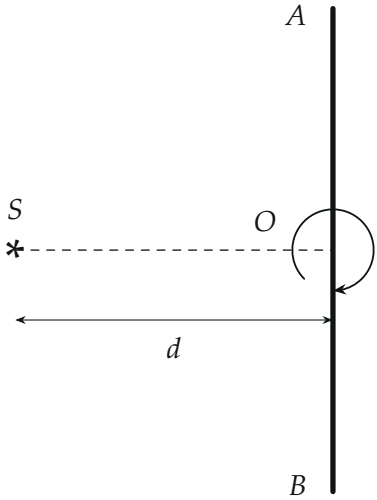
Вращающееся зеркало маяка

Задача 4. [ИОШ 2022/23, 10 класс, задача 4] Для предотвращения столкновений судов с землёй в ночное время суток на берегу моря ставят маяки, которые должны предупредить корабли об опасном приближении к суше. Наиболее эффективно такие маяки работают, если они дают прерывистый световой сигнал. Рассмотрите следующую модель источника света для такого маяка. Неподвижный точечный источник света S находится на расстоянии $d = 50$ см от зеркала AB (см. рисунок). Зеркало вращается с угловой скоростью $\omega = 1$ рад/с вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через середину зеркала (через точку O на рисунке). Найти скорость и ускорение изображения источника в зеркале.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на построение изображения в плоском зеркале и кинематику вращения. Изображение точки в плоском зеркале симметрично ей относительно плоскости зеркала. Ось вращения O лежит в плоскости зеркала, а симметрия относительно прямой сохраняет расстояния до любой точки этой прямой. Поэтому изображение всё время находится на расстоянии d от O — движется по окруж-

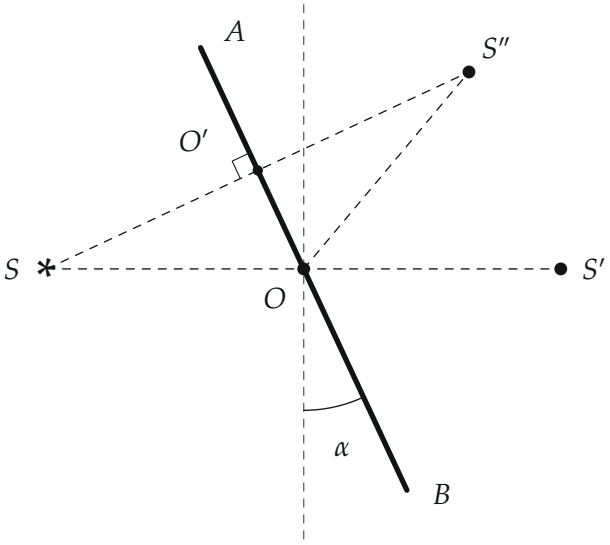
ности. Остаётся найти, с какой угловой скоростью оно бежит по этой окружности.

Обозначения. S' — изображение при исходном положении зеркала, S'' — после поворота зеркала на угол α; O' — основание перпендикуляра из S на повёрнутое зеркало; ω' — угловая скорость изображения; v, a — его скорость и ускорение.

1. Изображение лежит на окружности радиуса d. По закону отражения изображение S'' лежит на перпендикуляре SO' к зеркалу, по другую сторону от зеркала и на таком же расстоянии: $O'S'' = SO'$. Точка O лежит на зеркале, поэтому прямоугольные треугольники $SO'O$ и $S''O'O$ равны (общий катет OO', равные катеты SO' и $O'S''$). Значит,

$$OS'' = OS = d$$

при любом угле поворота. Изображение движется по окружности с центром O радиуса $R = d$; отрезок SS' — её диаметр.

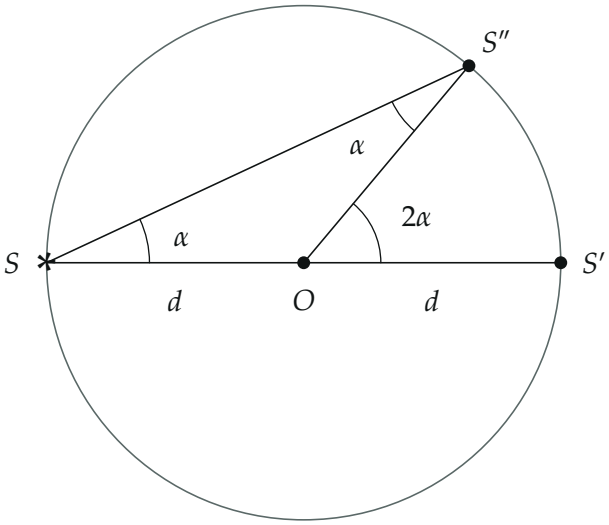


Построение изображения: исходное положение зеркала — серый пунктир, изображение в нём S'; зеркало AB повёрнуто на угол α, изображение S'' симметрично S относительно AB.

2. На какой угол поворачивается изображение. Нормаль SO' к зеркалу повернулась вместе с зеркалом на угол α, поэтому $\angle O'SO = \alpha$. Треугольник SOS'' равнобедренный ($OS = OS'' = d$), значит $\angle OS''S = \angle OSS'' = \alpha$. Центральный угол $\angle S'OS''$ — внешний угол этого треугольника при вершине O и равен сумме двух углов при основании:

$$\angle S'OS'' = 2\alpha.$$

Второй способ, короче: вписанный угол $S'SS'' = \alpha$ опирается на дугу $S'S''$, а центральный угол на ту же дугу вдвое больше.



Треугольник SOS'' равнобедренный, поэтому центральный угол $S'OS''$ вдвое больше угла поворота зеркала.

3. Скорость изображения. Зеркало поворачивается равномерно: $\alpha = \omega t$. Изображение поворачивается вокруг O на угол $2\alpha = 2\omega t$, то есть равномерно с угловой скоростью

$$\omega' = 2\omega.$$

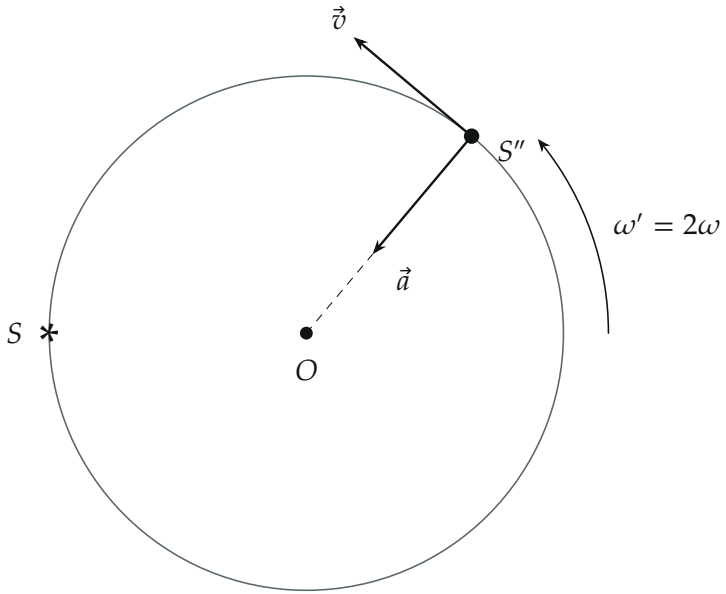
Для равномерного движения по окружности скорость направлена по ка-

сательной и по модулю равна

$$v = \omega' R = 2\omega d = 2 \cdot 1 \cdot 0{,}5 = 1 \text{ м/с}.$$

4. Ускорение изображения. Модуль скорости постоянен, поэтому касательного ускорения нет, есть только центростремительное, направленное к центру окружности — к оси O:

$$a = \omega'^2 R = 4\omega^2 d = 4 \cdot 1^2 \cdot 0{,}5 = 2 \text{ м/с}^2.$$



Изображение бежит по окружности радиуса d с угловой скоростью 2ω: скорость $\vec{v}$ по касательной, ускорение $\vec{a}$ к центру O.

Обратите внимание. Скорость изображения вдвое больше, чем у точки зеркала на расстоянии d от оси: при повороте зеркала на α отражённый луч и изображение поворачиваются на 2α. Отражает свет только одна сторона зеркала, поэтому изображение видно не всё время, а на части оборота — отсюда и прерывистый сигнал маяка; на ответ это не влияет.

Ответ. $v = 2\omega d = 1$ м/с, ускорение направлено к оси вращения зеркала, $a = 4\omega^2 d = 2$ м/с^2.

Проверка. Размерность: $[\omega d] = $ рад/с $\cdot$ м $=$ м/с, $[\omega^2 d] = $ м/с^2. Предел: $\omega = 0$ — зеркало стоит, изображение неподвижно, $v = a = 0$. Вычисление ещё раз через координаты: при повороте зеркала на α изображение находится в точке $O + d\,(\cos 2\alpha, \sin 2\alpha)$; производная по времени даёт $|\vec{v}| = 2\omega d$, вторая — $|\vec{a}| = 4\omega^2 d$.

Физический смысл. Изображение источника в плоском вращающемся зеркале обходит окружность радиуса d вдвое быстрее зеркала.

Ответ. $v = 2\omega d = 1$ м/с; $a = 4\omega^2 d = 2$ м/с^2 (к оси вращения зеркала).