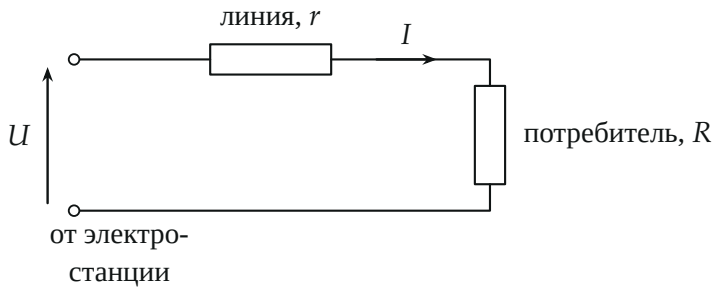
Потери в линии электропередач

Задача 5. [ИОШ 2022/23, 10 класс, задача 5] Линия электропередач передаёт электроэнергию от электростанции потребителю. Потери мощности в линии составляют $\eta_1 = 5\,\%$ от мощности, получаемой потребителем. Во сколько раз нужно изменить напряжение на входе линии и сопротивление потребителя для того, чтобы при той же мощности, получаемой потребителем, снизить потери в линии до $\eta_2 = 1\,\%$?



Поясняющий рисунок: напряжение U подано на вход линии сопротивлением r (оба провода вместе), на конце линии — потребитель сопротивлением R.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на закон Ома и закон Джоуля — Ленца для последовательной цепи. Ток одинаков в линии и у потребителя, поэтому мощности делятся в отношении сопротивлений: доля потерь $\eta = r/R$. Чтобы её уменьшить, надо увеличить сопротивление потребителя. Но при прежнем напряжении ток упадёт, и потребитель получит меньше — значит, напряжение на входе тоже нужно поднять. Два условия (новая доля потерь и прежняя мощность у потребителя) дают оба множителя.

Обозначения. r — сопротивление линии (не меняется); U_1, R_1, I_1 — напряжение на входе линии, сопротивление потребителя и ток в первом случае; U_2, R_2, I_2 — во втором; P — мощность потребителя (одна и та же).

1. Доля потерь. Линия и потребитель соединены последовательно, ток в них один и тот же. По закону Джоуля — Ленца мощность потерь

в линии $P_0 = I^2 r$, мощность потребителя $P = I^2 R$, поэтому

$$\eta = \frac{P_0}{P} = \frac{r}{R}.$$

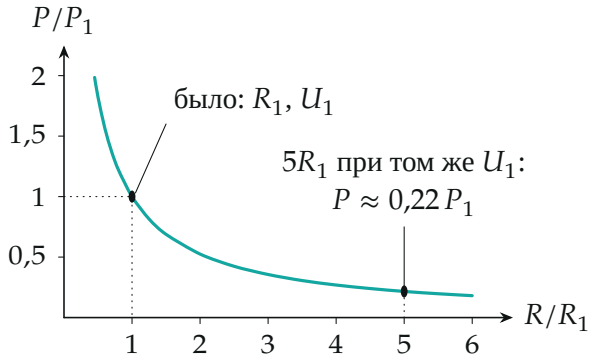
Доля потерь зависит только от отношения сопротивлений. Чтобы снизить её с η_1 до η_2 при той же линии, сопротивление потребителя нужно увеличить:

$$R_1 = \frac{r}{\eta_1}, \qquad R_2 = \frac{r}{\eta_2}, \qquad \frac{R_2}{R_1} = \frac{\eta_1}{\eta_2} = 5.$$

2. Почему нельзя менять только сопротивление. По закону Ома для всей цепи $I = U/(r+R)$, и мощность потребителя при неизменном напряжении

$$P = \frac{U^2 R}{(r+R)^2}.$$

При $R \gg r$ она убывает примерно как $1/R$: увеличив сопротивление в 5 раз при прежнем напряжении, потребитель получил бы лишь около 0,22 прежней мощности (рисунок ниже). Поэтому напряжение на входе нужно поднять.



Мощность потребителя при неизменном напряжении U_1 в зависимости от его сопротивления ($r = 0{,}05R_1$): $P/P_1 = \dfrac{1{,}05^2\, x}{(0{,}05+x)^2}$, $x = R/R_1$.

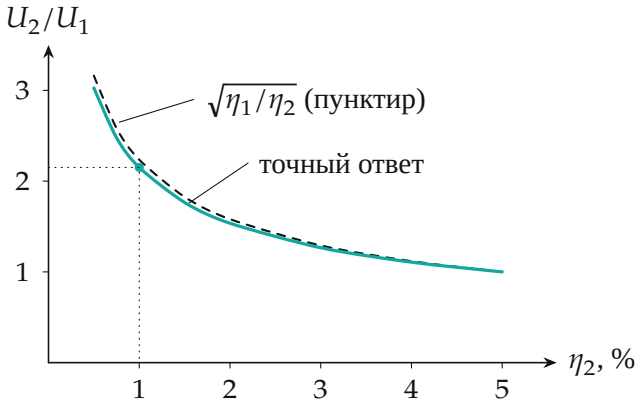
3. Условие той же мощности. Приравняем мощности потребителя в двух случаях:

$$\frac{U_1^2 R_1}{(r+R_1)^2} = \frac{U_2^2 R_2}{(r+R_2)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{U_2}{U_1} = \frac{r+R_2}{r+R_1}\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}.$$

Подставим $R = r/\eta$: $r + R = r(1+\eta)/\eta$, поэтому

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{(1+\eta_2)/\eta_2}{(1+\eta_1)/\eta_1}\sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_1}} = \frac{1+\eta_2}{1+\eta_1}\sqrt{\frac{\eta_1}{\eta_2}} = \frac{1{,}01}{1{,}05}\sqrt{5} \approx 2{,}15.$$

Так множитель для напряжения зависит от того, до какой доли η_2 снижаем потери:

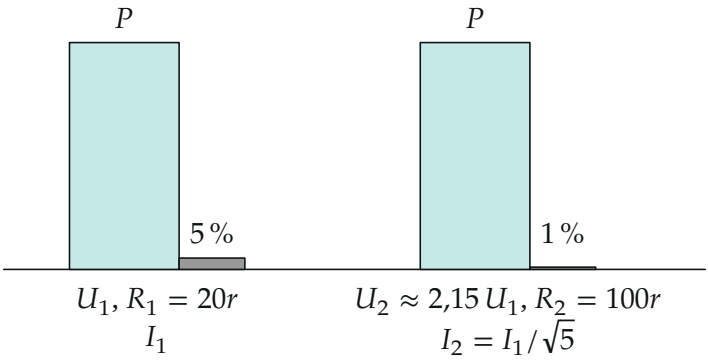


Во сколько раз поднять напряжение на входе, чтобы снизить потери с 5 % *до* η_2 *при той же мощности потребителя: точная формула (бирюзовая) и правило* $\sqrt{\eta_1/\eta_2}$ *(пунктир).*

4. Второй способ — через ток. Мощность потребителя $P = I^2R$ одна и та же, а R выросло в 5 раз, значит, ток уменьшился в $\sqrt{5}$ раз: $I_2 = I_1/\sqrt{5}$. Напряжение на входе $U = I(r+R) = IR(1+\eta)$:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{1+\eta_2}{1+\eta_1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 5\cdot\frac{1{,}01}{1{,}05} = \sqrt{5}\,\frac{1{,}01}{1{,}05} \approx 2{,}15,$$

то же самое. Потери в линии I^2r при этом упали в 5 раз: 5 % от P стало 1 % от P.



Мощность потребителя (бирюзовые столбики) одна и та же, потери в линии (серые) уменьшились с 5 % до 1 % от неё.

Обратите внимание. «Напряжение на входе линии» — это напряжение на линии и потребителе вместе, $U = I(r + R)$, а не на потребителе. Поэтому ответ не ровно $\sqrt{\eta_1/\eta_2} = \sqrt{5} \approx 2{,}24$, а меньше на множитель $(1 + \eta_2)/(1 + \eta_1) \approx 0{,}96$. Привычное правило «уменьшить потери в n раз — поднять напряжение в $\sqrt{n}$ раз» верно при малых потерях.

Ответ. Сопротивление потребителя увеличить в $\eta_1/\eta_2 = 5$ раз, напряжение на входе линии увеличить в $\dfrac{1 + \eta_2}{1 + \eta_1}\sqrt{\dfrac{\eta_1}{\eta_2}} \approx 2{,}15$ раза.

Проверка. Размерность: оба ответа — отношения однородных величин, безразмерны. Предел: при $\eta_2 = \eta_1$ получаем $U_2/U_1 = 1$ и $R_2/R_1 = 1$ — ничего менять не надо. Знак: потери снижаются — напряжение и сопротивление растут. Численно (python): при $r = 1$, $R_1 = 20$, $U_1 = 21$ потребитель получает 20, линия теряет 1; при $R_2 = 100$, $U_2 = 21 \cdot 2{,}1509 = 45{,}17$ ток 0,4472, потребитель получает 20,0, линия теряет 0,200 — ровно 1 %.

Физический смысл. Передавать ту же мощность выгоднее при большем напряжении и меньшем токе: потери в проводах пропорциональны квадрату тока.

Ответ. Напряжение на входе линии увеличить в $\dfrac{1+\eta_2}{1+\eta_1}\sqrt{\dfrac{\eta_1}{\eta_2}} \approx 2{,}15$ раза; сопротивление потребителя увеличить в $\eta_1/\eta_2 = 5$ раз.