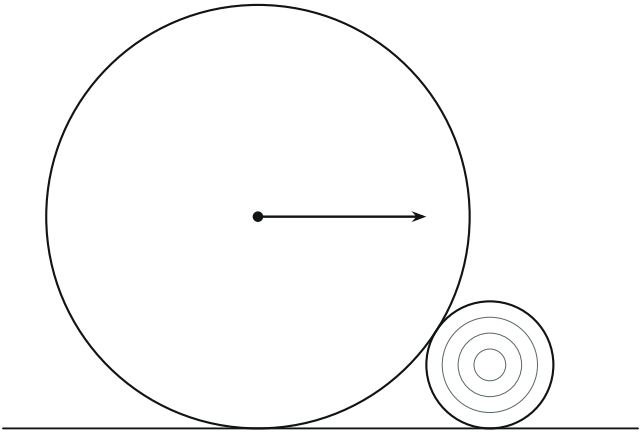
Бревно на дороге и колесо автомобиля

Задача 6. [ИОШ 2022/23, 10 класс, задача 6] На дороге лежит бревно радиуса r. Перпендикулярно бревну едет автомобиль, колёса которого имеют радиус R. Считая, что коэффициенты трения колеса автомобиля о бревно и бревна о дорогу одинаковы, найти при каких значениях этого коэффициента колёса автомобиля смогут медленно переехать бревно. Весом бревна пренебречь.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равновесие (переезд медленный, ускорениями пренебрегаем) и на условие отсутствия проскальзывания. Ведущее колесо подталкивается автомобилем к бревну и закручивается двигателем; поднять его на бревно может только сила, с которой бревно действует на колесо. Бревно невесомое, на него действуют силы только в двух точках — со стороны колеса и со стороны дороги. Если бревно проскользнёт по дороге или колесо проскользнёт по бревну (бревно начнёт проворачиваться), колесо будет буксовать и не заедет. Ищем, при каком коэффициенте трения μ бревно может оставаться в покое.

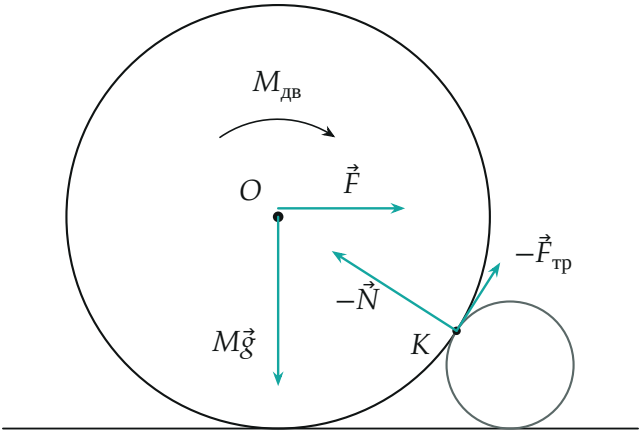
Обозначения. O и C — центры колеса и бревна, K — точка касания колеса и бревна, G — точка касания бревна и дороги; α — угол между

линией центров CO и горизонталью; $\vec{N}$, $\vec{F}_{\text{тр}}$ — сила реакции и сила трения со стороны колеса на бревно (на колесо — противоположные); $\vec{N}_1$, $\vec{F}_{\text{тр},1}$ — со стороны дороги на бревно.

1. Геометрия. Колесо, начиная подниматься, ещё касается дороги: его центр на высоте R, центр бревна на высоте r, расстояние между центрами $R + r$ (окружности касаются в точке K на линии центров). Из прямоугольного треугольника с гипотенузой CO

$$\sin\alpha = \frac{R-r}{R+r}, \qquad \cos\alpha = \frac{\sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2}}{R+r} = \frac{2\sqrt{Rr}}{R+r}.$$

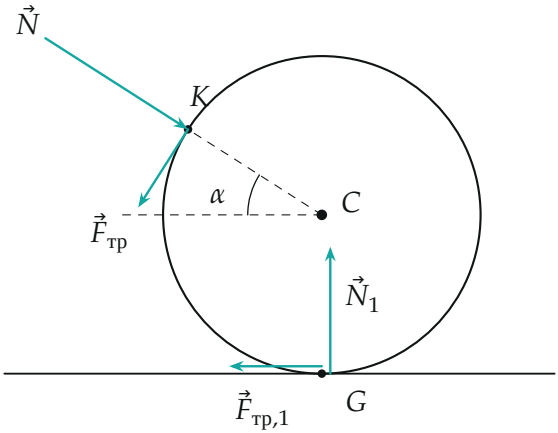
2. Силы на колесо. На колесо действуют сила тяжести (часть веса автомобиля) $M\vec{g}$, сила $\vec{F}$ со стороны автомобиля (горизонтально, к бревну), момент двигателя и силы со стороны бревна: реакция $-\vec{N}$ по линии центров к центру колеса и сила трения $-\vec{F}_{\text{тр}}$ по касательной вверх — двигатель крутит колесо так, что его точка касания скользила бы по бревну вниз, трение ей мешает. Именно сила трения вместе с реакцией поднимает колесо; нажимая на газ, водитель увеличивает момент двигателя, а с ним — силу трения. Значит, вопрос только в том, выдержит ли бревно.



Силы, действующие на колесо в момент, когда оно начинает заезжать на бревно: вес, толкающая сила автомобиля, момент двигателя, реакция и трение со стороны бревна.

3. Равновесие бревна: моменты. Бревно невесомое и покоится, поэтому сумма сил и сумма моментов сил, действующих на него, равны нулю. Возьмём моменты относительно центра C. Реакции $\vec{N}$ и $\vec{N}_1$ направлены по радиусам и момента не дают; силы трения касательны, их плечи равны r. Моменты от $\vec{F}_{\text{тр}}$ и $\vec{F}_{\text{тр},1}$ должны компенсировать друг друга:

$$F_{\text{тр}}\, r = F_{\text{тр},1}\, r \quad \Rightarrow \quad F_{\text{тр}} = F_{\text{тр},1}.$$



Силы, действующие на бревно: со стороны колеса — $\vec{N}$ и $\vec{F}_{тр}$ в точке K, со стороны дороги — $\vec{N}_1$ и $\vec{F}_{тр,1}$ в точке G.

4. Равновесие бревна: силы. Колесо давит на бревно вдоль линии OC: $\vec{N}$ направлена вправо-вниз под углом α к горизонтали. Сила трения со стороны колеса $\vec{F}_{\text{тр}}$ касательна в точке K и направлена влево-вниз (противоположно трению на колесо). Дорога давит вверх ($\vec{N}_1$), а её сила трения $\vec{F}_{\text{тр},1}$ мешает бревну уехать вправо и направлена влево. Первый закон Ньютона для бревна в проекциях на горизонталь и вертикаль:

$$x:\ N\cos\alpha - F_{\text{тр}}\sin\alpha - F_{\text{тр},1} = 0, \qquad y:\ N_1 - N\sin\alpha - F_{\text{тр}}\cos\alpha = 0.$$

С учётом $F_{\text{тр},1} = F_{\text{тр}}$ из первого

$$F_{\text{тр}} = F_{\text{тр},1} = \frac{N\cos\alpha}{1+\sin\alpha},$$

из второго

$$N_1 = N\sin\alpha + \frac{N\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha} = N\,\frac{\sin\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha} = N.$$

Знаки: все величины положительны, направления на рисунке выбраны верно.

5. Условие отсутствия проскальзывания. Трение покоя не больше μ, умноженного на силу реакции, в обеих точках: $F_{\text{тр}} \le \mu N$ и $F_{\text{тр},1} \le \mu N_1$. Так как $F_{\text{тр}} = F_{\text{тр},1}$ и $N = N_1$, оба условия одинаковы — проскальзывание наступило бы в обеих точках одновременно:

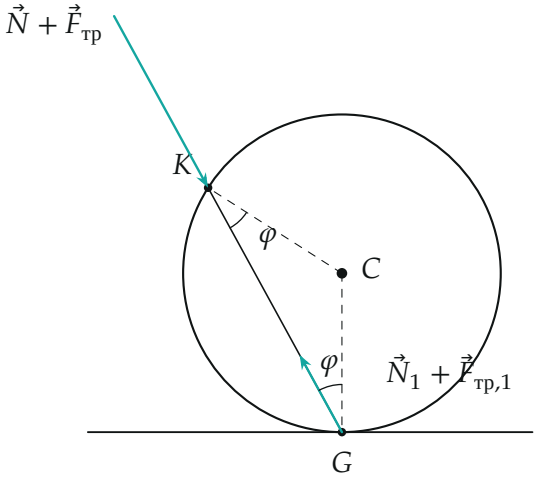
$$\mu \ge \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} = \frac{2\sqrt{Rr}/(R+r)}{2R/(R+r)} = \sqrt{\frac{r}{R}}.$$

Отношение $F_{\text{тр}}/N$ не зависит от того, как сильно колесо давит: увеличение газа увеличивает обе силы пропорционально. Поэтому при $\mu \ge \sqrt{r/R}$ бревно стоит при любом нажиме, а при меньшем — проворачивается и скользит, сколько ни жми.

6. Второй способ — бревно как тело под действием двух сил. На невесомое бревно действуют только две полные силы: в точке K (сумма $\vec{N}+\vec{F}_{\text{тр}}$) и в точке G (сумма $\vec{N}_1+\vec{F}_{\text{тр},1}$). Две силы уравновешены, только если они направлены вдоль одной прямой навстречу друг другу — вдоль хорды KG. Угол между хордой и радиусом в точке касания — угол при основании равнобедренного треугольника CKG с углом при вершине $\angle KCG = 90^\circ + \alpha$:

$$\varphi = \frac{180^\circ - (90^\circ+\alpha)}{2} = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

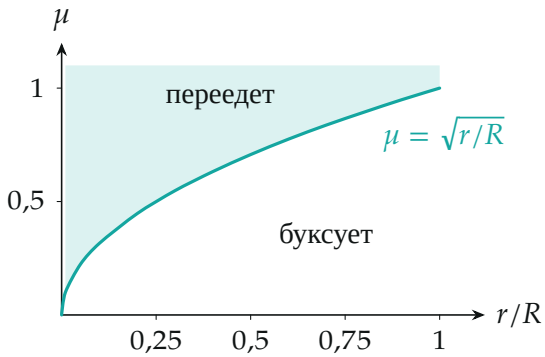
Полная сила отклонена от нормали на угол φ, значит $F_{\text{тр}}/N = \operatorname{tg}\varphi$, и условие покоя $\mu \ge \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha/2) = \dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$ — тот же ответ. Одинаковый угол в обеих точках сразу объясняет, почему проскальзывание наступает в них одновременно.



Невесомое бревно: полные силы в точках K и G направлены вдоль хорды KG; угол $\varphi = 45° - \alpha/2$ между хордой и радиусом одинаков в обеих точках.

Обратите внимание. Вес колеса и сила $\vec{F}$ в ответ не входят: они нужны, чтобы поднять колесо, а условие переезда определяет бревно, которое должно остаться на месте. Невесомость бревна здесь главное: будь оно тяжёлым, сила N_1 была бы больше N, и бревно проскальзывало бы сначала относительно колеса.

Ответ. $\mu \geq \sqrt{r/R}$.



Граница переезда $\mu = \sqrt{r/R}$: выше кривой колесо переедет бревно, ниже — бревно проворачивается и скользит.

Проверка. Размерность: μ и $\sqrt{r/R}$ безразмерны. Пределы: тонкая палка ($r \to 0$) — нужен сколь угодно малый коэффициент трения, переехать легко; бревно размером с колесо ($r = R$, $\alpha = 0$, колесо давит горизонтально) — нужно $\mu \geq 1$. Численно: при $r/R = 0{,}3$ угол $\alpha = 32{,}6°$, $\cos\alpha/(1+\sin\alpha) = 0{,}548 = \sqrt{0{,}3}$.

Физический смысл. Колесо переезжает бревно, если бревно не проворачивается под ним: чем толще бревно относительно колеса, тем сильнее колесо давит на него вбок и тем больше нужно трение.

Ответ. $\mu \geq \sqrt{\dfrac{r}{R}}$.