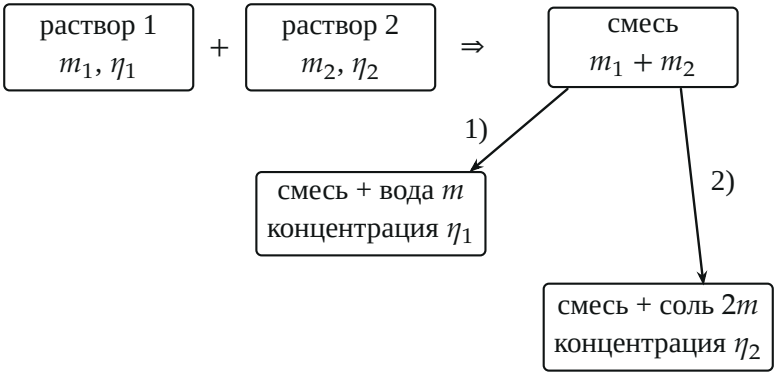
Растворы соли и добавки

Задача 1. [ИОШ 2022/23, 11 класс, задача 1] Если смешать некоторые количества растворов соли с массовой концентрацией соли $\eta_1 = 0{,}3$ и $\eta_2 = 0{,}7$ и добавить к смеси $m = 5$ кг чистой воды, получится раствор соли с массовой концентрацией η_1. А если бы вместо воды к смеси добавить (и растворить) массу $2m$ соли, получился бы раствор соли с массовой концентрацией η_2. Найти массы m_1 и m_2 первого и второго растворов.



Поясняющая схема: из одной и той же смеси получают два разных раствора. Либо добавляют воду, либо вместо воды — соль.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на смешивание растворов; класс таких задач решается подсчётом соли. Массовая концентрация — доля соли в массе раствора, поэтому масса соли в растворе равна произведению концентрации на массу раствора. Раствор 1 уже имеет концентрацию η_1, а в первом случае итог тоже η_1. Значит, раствор 1 в первом случае не даёт ни лишней соли, ни нехватки, и первое уравнение даст сразу m_2. Во втором случае итог — η_2, и по той же причине сразу уйдёт m_2, останется m_1.

Обозначения. m_1, m_2 — массы растворов 1 и 2 (искомые), $\eta_1 = 0{,}3$, $\eta_2 = 0{,}7$, $m = 5$ кг. Соль и вода при смешивании не теряются, и растворение соли не меняет массу раствора: всё складывается по массам. Чистая вода — «раствор» с $\eta = 0$, чистая соль — с $\eta = 1$.

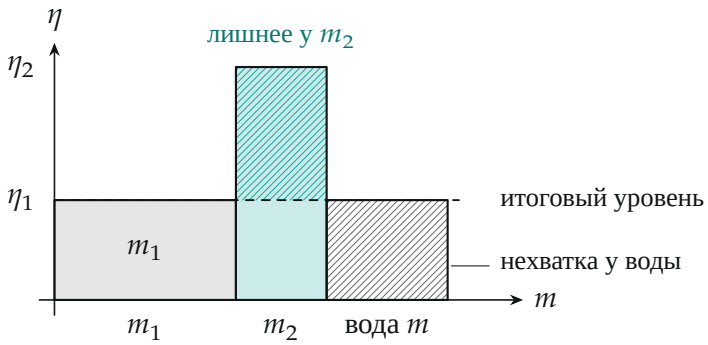
1. Образ: избыток и дефицит. Отложим концентрации на оси и посмотрим, как смесь двигают добавки.



Концентрация смеси лежит между η_1 и η_2 (на рисунке — по ответу). Вода сдвигает её влево, до η_1, соль — вправо, до η_2.

Чтобы собрать это в цифры, сравним соль, которая есть, с той, которая была бы, если бы вся масса имела итоговую концентрацию. У каждой части раствора либо лишняя соль (концентрация выше итоговой), либо нехватка (ниже). Итоговый раствор получается однородным, поэтому *лишнее равно нехватке*. На рисунке ширина прямоугольника — масса, высота — концентрация, а площадь — масса соли.

2. Первый случай: к смеси добавили воду m. Итоговая концентрация — η_1, ровно как у раствора 1. Его прямоугольник целиком лежит на итоговом уровне, и лишнего и нехватки у него нет. Лишняя соль есть у раствора 2, нехватка — у воды.



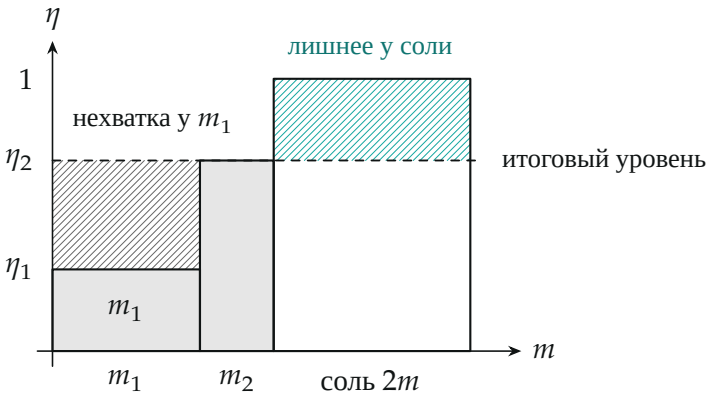
Случай 1 (в масштабе). Бирюзовая штриховка — лишняя соль в растворе 2, серая — нехватка в воде; площади равны.

Лишняя соль раствора 2 — на каждый килограмм на $\eta_2 - \eta_1$ больше итогового; нехватка воды — на каждый килограмм на $\eta_1 - 0$. Приравняем:

$$m_2(\eta_2 - \eta_1) = m\,\eta_1 \qquad \Longrightarrow \qquad m_2 = \frac{m\,\eta_1}{\eta_2 - \eta_1}.$$

Обратите внимание: m_1 в уравнение не вошла — не потому, что мы её отбросили, а потому, что раствор 1 по концентрации совпадает с итогом.

3. Второй случай: к смеси добавили соль $2m$**.** Теперь итог — η_2, и без вклада остаётся раствор 2. Нехватка соли — у раствора 1 (его концентрация ниже), лишняя — у добавленной соли (концентрация 1).



Случай 2 (в масштабе). Серая штриховка — нехватка соли в растворе 1, бирюзовая — лишняя соль добавки.

Нехватка раствора 1 — на каждый килограмм на $\eta_2 - \eta_1$; лишнее у соли — на $1 - \eta_2$ на килограмм, а масса добавки $2m$:

$$m_1(\eta_2 - \eta_1) = 2m\,(1 - \eta_2) \qquad \Longrightarrow \qquad m_1 = \frac{2m\,(1 - \eta_2)}{\eta_2 - \eta_1}.$$

4. Числа.

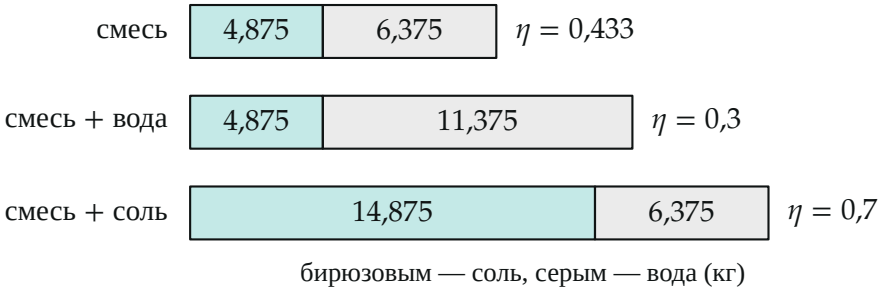
$$m_2 = \frac{5 \cdot 0{,}3}{0{,}7 - 0{,}3} = 3{,}75 \text{ кг}, \qquad m_1 = \frac{2 \cdot 5\,(1 - 0{,}7)}{0{,}7 - 0{,}3} = 7{,}5 \text{ кг}.$$

Проверка вторым способом — прямой подсчёт соли. Соль в смеси $S = \eta_1 m_1 + \eta_2 m_2 = 0{,}3 \cdot 7{,}5 + 0{,}7 \cdot 3{,}75 = 4{,}875$ кг, масса смеси $M =$

$m_1 + m_2 = 11{,}25$ кг, концентрация смеси $S/M \approx 0{,}433$ — между 0,3 и 0,7, как и должно быть. Дальше

$$\frac{S}{M+m} = \frac{4{,}875}{16{,}25} = 0{,}3 = \eta_1, \qquad \frac{S+2m}{M+2m} = \frac{14{,}875}{21{,}25} = 0{,}7 = \eta_2.$$

Оба условия задачи выполнены. Тот же итог — на столбиках масс соли и воды в трёх состояниях.



Массы соли (бирюзовая часть) и воды в трёх состояниях. При добавлении воды масса соли остаётся 4,875 кг, при добавлении соли не меняется масса воды: 6,375 кг.

Физический смысл. Первое условие определяет m_2 (сколько раствора 2 нужно, чтобы его избыток компенсировал воду), второе — m_1 (сколько раствора 1 нужно, чтобы его недостаток компенсировал добавку соли).

Проверка: концентрации безразмерны, поэтому m_1 и m_2 — в килограммах, как m. Предел: $\eta_2 \to \eta_1$ ($0{,}7 \to 0{,}3$) даёт $m_{1,2} \to \infty$: при одинаковых растворах смесь уже имеет концентрацию η_1, любая вода сделает её ниже, и условие выполнить нельзя.

Ответ. $m_1 = \dfrac{2m(1-\eta_2)}{\eta_2 - \eta_1} = 7{,}5$ кг; $\quad m_2 = \dfrac{m\,\eta_1}{\eta_2 - \eta_1} = 3{,}75$ кг.