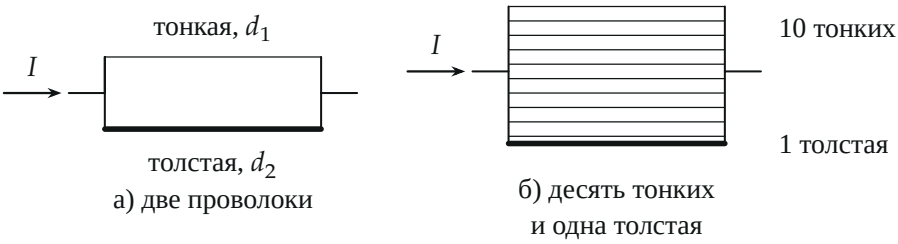
Предохранители из оловянной проволоки

Задача 2. [ИОШ 2022/23, 11 класс, задача 2] Из двух видов оловянной проволоки сделали предохранители. Проволока диаметром $d_1 = 0{,}2$ мм плавится (и предохранитель разрывает электрическую цепь) при пропускании через неё тока $I_1 = 1{,}8$ А. Проволока диаметром $d_2 = 0{,}5$ мм плавится при пропускании тока $I_2 = 5$ А. При каком токе разорвёт цепь предохранитель, составленный из тонкой и толстой проволок одинаковых длин, соединённых параллельно? Из десяти тонких и одной толстой проволоки одинаковых длин, соединённых параллельно? Считать, что сопротивление предохранителя много меньше сопротивления цепи.



Поясняющий рисунок к условию: предохранители из параллельно соединённых проволок одинаковой длины.

▲ **Решение. Что происходит.** Предохранитель включён в цепь с большим сопротивлением, поэтому ток I в цепи задаёт остальная цепь, а предохранитель его не меняет. Параллельные проволоки делят этот ток между собой, и делят не поровну: толстая проводит больше. Когда ток в одной из проволок достигает её предела, она перегорает, весь ток переходит на оставшиеся, и вопрос — выдержат ли они. Главная идея — следить за токами в каждой проволоке по очереди.

Обозначения. I — ток в цепи; $I_т$ и $I_н$ — токи в толстой и в тонкой проволоке; $\kappa = (d_1/d_2)^2 = 0{,}16$ — отношение площадей сечений тонкой и толстой проволок. Длина проволок одинакова, материал один и тот же (олово).

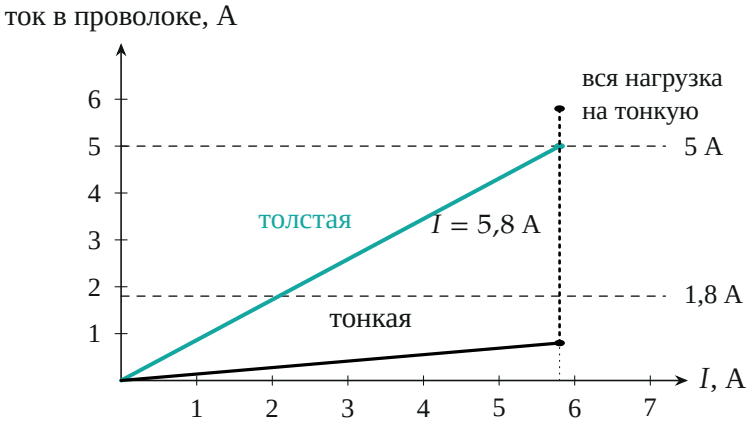
1. Сопротивления и распределение тока. Сопротивление проволоки длины ℓ из материала с удельным сопротивлением ρ и площадью

сечения $S = \pi d^2/4$ равно $R = \rho\ell/S \sim 1/d^2$. У проволок одинаковая длина и материал, поэтому

$$\frac{R_н}{R_т} = \frac{S_т}{S_н} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 = 6{,}25.$$

При параллельном соединении напряжение на всех проволоках одно и то же, поэтому токи обратно пропорциональны сопротивлениям: $I_н/I_т = R_т/R_н = \kappa = 0{,}16$. Это верно, пока целы обе проволоки.

2. Какая проволока перегорит первой. Предельные токи отличаются в $I_2/I_1 = 2{,}8$ раза, а токи при параллельном соединении — в 6,25 раза. Значит, толстая проволока загружена сильнее: у неё ток вырастет до своего предела раньше, чем у тонкой. Проверим числом: когда в толстой 5 А, в тонкой $\kappa \cdot 5 = 0{,}8$ А, а предел тонкой 1,8 А.



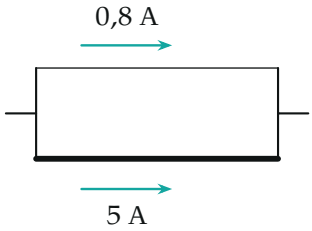
Токи в проволоках при росте тока I в цепи (две проволоки). Пунктиры — пределы: 5 А у толстой и 1,8 А у тонкой. Толстая достигает предела при $I = 5{,}8$ А; тонкая в этот момент несёт 0,8 А, а после обрыва толстой — весь ток 5,8 А, что больше её предела.

3. Ток в цепи в момент перегорания толстой. Ток в цепи — сумма токов проволок:

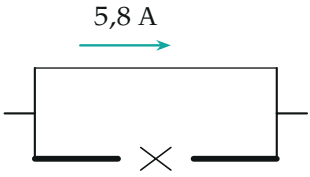
$$I_3 = I_2 + \kappa I_2 = I_2(1+\kappa) = I_2\,\frac{d_1^2 + d_2^2}{d_2^2} = 5{,}8\text{ А}.$$

Знак: при этом токе тонкая проволока ещё цела ($0{,}8 < 1{,}8$ А), и толстая — действительно первая.

4. Что после обрыва толстой. Обратите внимание: сопротивление предохранителя много меньше сопротивления цепи, поэтому ток в цепи не меняется скачком, и теперь весь ток 5,8 А течёт через тонкую проволоку. Это больше её предела 1,8 А, значит, она тоже перегорает, и цепь разорвана. Ответ на первый вопрос: $I_3 = 5{,}8$ А.



1) $I = 5{,}8$ А: толстая на пределе



2) толстая перегорела

Токи до и после обрыва толстой проволоки: тонкая получает весь ток цепи.

5. Десять тонких и одна толстая. Идея та же. Десять одинаковых тонких проволок делят ток поровну; при параллельном соединении токи пропорциональны d^2, поэтому на ток цепи приходятся доли

$$I_\text{т} = \frac{1}{1+10\kappa}\,I = \frac{I}{2{,}6}, \qquad I_\text{н} = \frac{\kappa}{1+10\kappa}\,I = \frac{I}{16{,}25}$$ в каждой тонкой.

Толстая проволока по-прежнему загружена сильнее ($I_\text{т}/I_\text{н} = 6{,}25$ против $I_2/I_1 = 2{,}8$), и она перегорает первой, когда $I_\text{т} = I_2 = 5$ А. В этот момент ток цепи

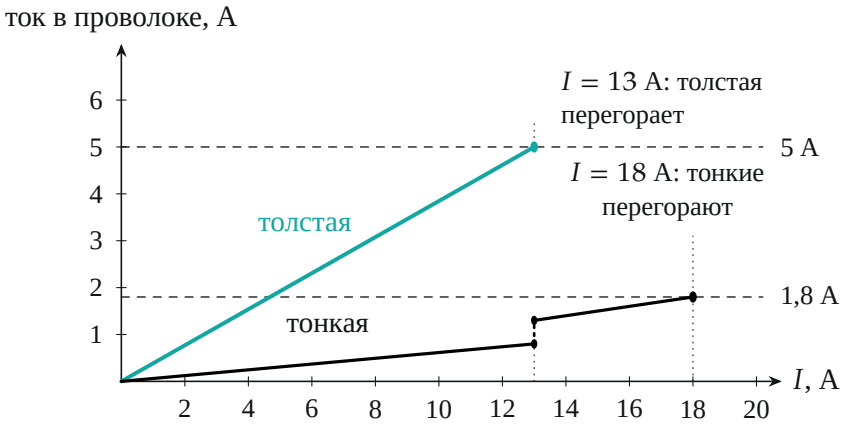
$$I_3' = I_2\,(1+10\kappa) = 5 \cdot 2{,}6 = 13 \text{ А},$$

а ток в каждой тонкой — 0,8 А, как и раньше.

6. После обрыва толстой. Весь ток 13 А делится поровну между десятью тонкими: в каждой

$$\frac{I_3'}{10} = 1{,}3 \text{ А} < I_1 = 1{,}8 \text{ А}.$$

Ток в каждой тонкой скачком вырос с 0,8 до 1,3 А, на 0,5 А: те самые 5 А толстой разошлись по десяти проволокам. Тонкие выдерживают и остаются целы. Теперь ток цепи можно увеличивать дальше, пока в тонких не станет I_1.

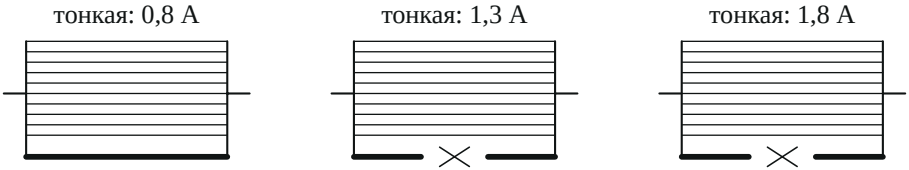


Токи в проволоках при росте тока I (десять тонких и одна толстая); пунктиры — пределы 5 А и 1,8 А. После обрыва толстой ток в каждой тонкой растёт с 0,8 до 1,3 А и дальше линейно до предела 1,8 А при $I = 18$ А.

7. Ток разрыва. Теперь в цепи десять одинаковых тонких проволок, и каждая перегорает при $I_1 = 1{,}8$ А; общий ток в этот момент

$$I_4 = 10\,I_1 = 18 \text{ А}.$$

Первая же перегоревшая проволока перекладывает свой ток на остальные девять, они сразу превышают предел, и цепь разрывается полностью. Знак: $18 > 13$ А — после обрыва толстой ток в цепи можно поднимать ещё на 5 А, пока тонкие не дойдут до своего предела.



Три состояния предохранителя из десяти тонких и одной толстой проволок и токи в тонких.

Проверка. Размерность: токи складываются, все величины в амперах. Второй способ для первого вопроса — через запас: для каждой проволоки найдём ток цепи, при котором она дойдёт до предела, считая, что обе целы: толстая $I_т = I_2(1 + \kappa) = 5{,}8$ А, тонкая $I_н = I_1(1 + 1/\kappa) = 1{,}8 \cdot 7{,}25 = 13{,}05$ А. Меньше первое — толстая перегорает первой, как и получили. Предел: при n тонких после обрыва толстой каждая получает прибавку I_2/n; при большом n прибавка мала, тонкие выдерживают переброс, и ток разрыва $I_4 = nI_1$ растёт с n, как и должен. При одной тонкой ($n = 1$) прибавка 5 А сразу больше её предела — это первый случай.

Физический смысл. Предохранитель из нескольких проволок разрывает цепь не при сумме пределов ($5 + 1{,}8 = 6{,}8$ А в первом случае), а раньше: сильнее загруженная толстая проволока перегорает первой и перекидывает свой ток на тонкую. Во втором случае тонкие, наоборот, выдерживают переброс и разрывают цепь при $10I_1$.

Ответ. 1) $I = I_2(1 + d_1^2/d_2^2) = 5{,}8$ А; 2) $I = 10\,I_1 = 18$ А.