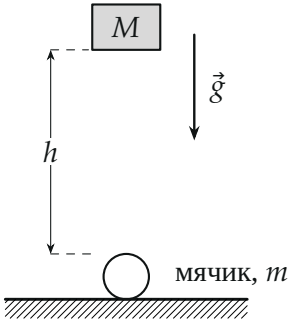
Падение тела на мячик

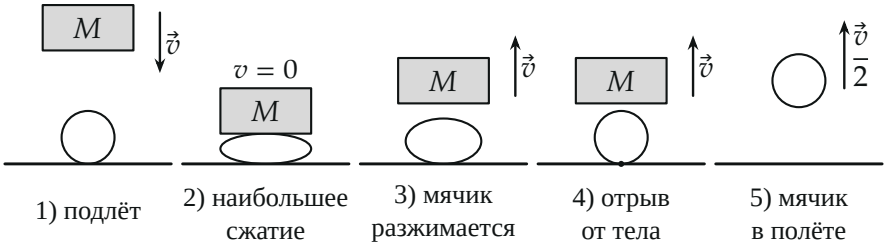
Задача 3. [ИОШ 2022/23, 11 класс, задача 3] Массивное тело падает с высоты h на лёгкий упругий мячик, лежащий на полу. Происходит абсолютно упругое столкновение. Оцените, на какую высоту подпрыгнет мячик после этого? Масса тела много-много больше массы мячика. Силой сопротивления воздуха пренебречь. Размеры мячика и тела — малы.



Поясняющий рисунок к условию: тело падает с высоты h на мячик, лежащий на полу ($M \gg m$; размеры мячика и тела на рисунке условно увеличены).

▲ **Решение.** **Что происходит.** Мячик оказывается зажатым между падающим телом и неподвижным полом. Тело массивно, поэтому почти не замечает мячика: оно сжимает его, останавливается, а мячик, разжимаясь, подбрасывает тело обратно практически с той же скоростью. А сам мячик остаётся «привязан» к полу снизу: его нижние точки всё время столкновения неподвижны, а верхние движутся вместе с телом. Поэтому мячик взлетает намного ниже тела. Главная идея — понять, как скорости точек мячика распределены в момент отрыва от тела, и найти скорость центра масс; после этого мячик — обычное тело, брошенное вверх.

Обозначения. M — масса тела, m — масса мячика, $M \gg m$; v — скорость тела перед ударом; h_1 — искомая высота подъёма центра масс мячика. Ось y направим вертикально вверх, начало — на уровне пола. Размеры мячика и тела малы, поэтому высоту отсчитываем от пола.



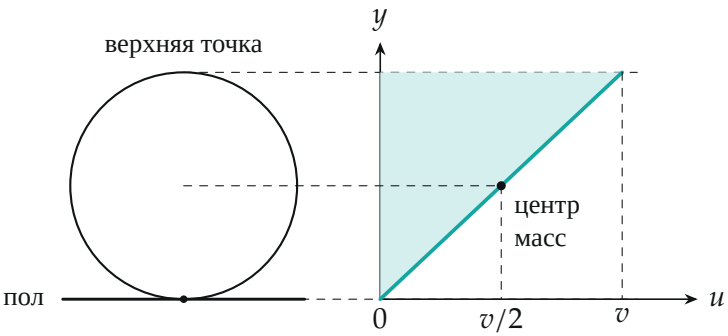
Этапы столкновения (мячик и тело не в масштабе). На этапах 2–4 нижняя точка мячика покоится на полу.

1. Скорость тела перед ударом. Тело падает свободно, сопротивления нет, поэтому сохраняется механическая энергия тела; приравняем потенциальную энергию на высоте h кинетической перед ударом:

$$Mgh = \frac{Mv^2}{2} \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{2gh}.$$

2. Тело почти не теряет энергию. Столкновение абсолютно упругое, неупругих процессов нет, поэтому механическая энергия системы «тело + мячик» сохраняется и может только перераспределиться между телом и мячиком. Сколько может достаться мячику? Мячик лежит под телом, и тело его толкает, а не наоборот: ни одна точка мячика не движется быстрее тела. Значит, кинетическая энергия мячика не больше $mv^2/2$, а это доля m/M от энергии тела $Mv^2/2$, то есть ничтожно мала. Поэтому после столкновения тело имеет практически ту же энергию и ту же скорость v, направленную вверх.

3. Скорости точек мячика в момент отрыва. Мячик отрывается от тела, когда разжался до формы, близкой к первоначальной. Верх мячика всё время контакта прижат к телу и движется вместе с ним, значит, в момент отрыва верхняя точка имеет скорость v вверх. А нижняя точка мячика лежит на полу, пол неподвижен — нижняя точка имеет скорость нуль. Обратите внимание: мячик не летит целиком со скоростью v, как свободный мячик, брошенный вверх, — его нижняя часть удерживается полом.



Слева — мячик в момент отрыва от тела. Справа — скорость точек мячика u в зависимости от высоты y: от 0 внизу до v вверху; на середине высоты — $v/2$.

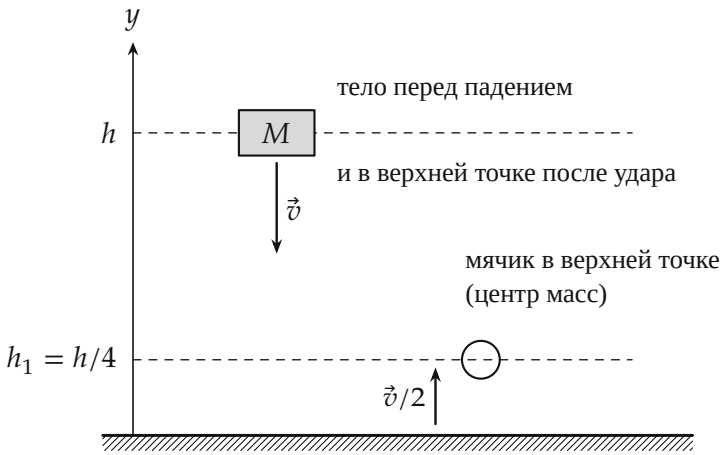
4. Скорость центра масс. Мячик маленький, а его точки движутся с разными скоростями: от нуля внизу до v вверху. Нам нужна скорость центра масс — именно она определяет, как высоко поднимется мячик как целое. Для оценки примем, что скорость точек растёт с высотой линейно (рисунок), а масса распределена по высоте равномерно. Тогда скорость центра масс — среднее по высоте:

$$v_{\text{цм}} = \frac{0 + v}{2} = \frac{v}{2}.$$

Это оценка: настоящий мячик устроен сложнее, но порядок скорости центра масс — половина v — сомнений не вызывает.

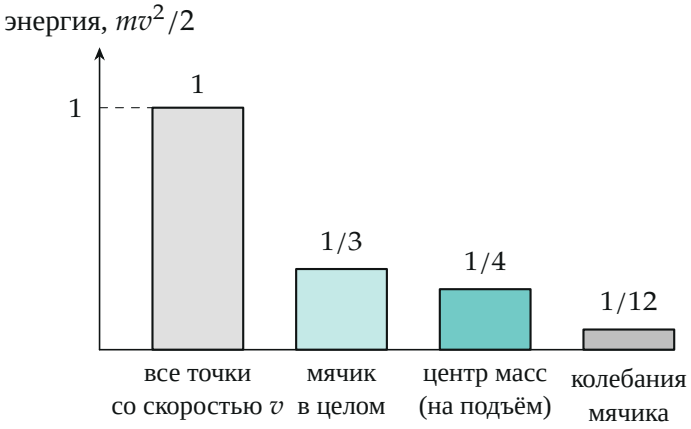
5. Высота подъёма. После отрыва на мячик действует только сила тяжести. Центр масс любого тела движется как материальная точка под действием внешних сил, колебания мячика на него не влияют, поэтому запишем закон сохранения механической энергии для движения центра масс от момента отрыва до верхней точки:

$$\frac{m\,(v/2)^2}{2} = mg\,h_1 \quad \Longrightarrow \quad h_1 = \frac{v^2}{8g} = \frac{2gh}{8g} = \frac{h}{4}.$$



Высоты в масштабе: тело возвращается почти на h, центр масс мячика — на $h/4$.

Проверка. Размерность: v^2/g — метры, как должна быть высота. Предел: центр масс не может подняться выше h, так как скорость центра масс не больше v; полученное $h/4$ лежит между 0 и h. Второй способ — сверка энергий: энергия движения центра масс $mv^2/8$, а полная кинетическая энергия мячика при линейном профиле скоростей $\frac{m}{2}\overline{u^2} = \frac{m}{2}\cdot\frac{v^2}{3} = \frac{mv^2}{6}$ — она больше, остаток $mv^2/24$ уходит в колебания мячика, как и должно быть: в центр масс может перейти не вся энергия. Доля энергии, взятая мячиком у тела, $\frac{mv^2/6}{Mv^2/2} = \frac{m}{3M} \ll 1$, что подтверждает шаг 2.



Энергия мячика в долях $mv^2/2$ (оценка): верхняя граница, линейный профиль скоростей, часть на подъём центра масс и часть на колебания.

Физический смысл. Упругий мячик под тяжёлым телом ведёт себя как зажатая пружинка: нижний конец упирается в пол, верхний бежит с телом. Центр масс — где-то посередине, и скорость у него вдвое меньше; высота растёт как квадрат скорости, отсюда четверть.

Ответ. $h_1 = \dfrac{h}{4}$ — мячик подпрыгнет примерно на четверть высоты, с которой упало тело.