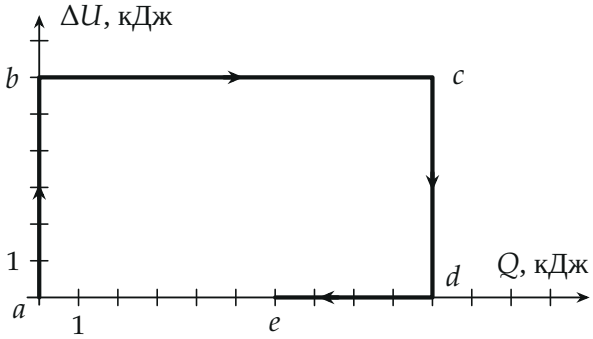
График U(Q) для одноатомного газа

Задача 4. [ИОШ 2022/23, 11 класс, задача 4] С одноатомным идеальным газом проходит процесс *a*–*b*–*c*–*d*–*e*, для которого дан график зависимости изменения внутренней энергии газа с начала процесса от количества теплоты, сообщённого газу с начала процесса (см. рисунок; единицы на осях показывают принятые для осей масштабы). Известно, что максимальная температура газа в течение всего процесса составляла $T_{\max} = 1000$ K, минимальная $T_{\min} = 500$ K. Качественно построить график зависимости давления газа от его объёма в этом процессе и обосновать построение. Количество вещества газа не менялось.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на чтение графика процесса. На графике по осям отложены накопленные с начала процесса ΔU и Q, поэтому каждый участок сразу узнаётся по первому началу термодинамики: если Q не меняется — на этом участке газ не обменивается теплом (адиабата), если не меняется ΔU — температура постоянна (изотерма). Главная идея — по этим участкам построить график $p(V)$, а потом выяснить, замыкается ли процесс (приходит ли *e* в *a*): для этого сравним работу газа, найденную двумя способами — по первому началу и по КПД цикла Карно.

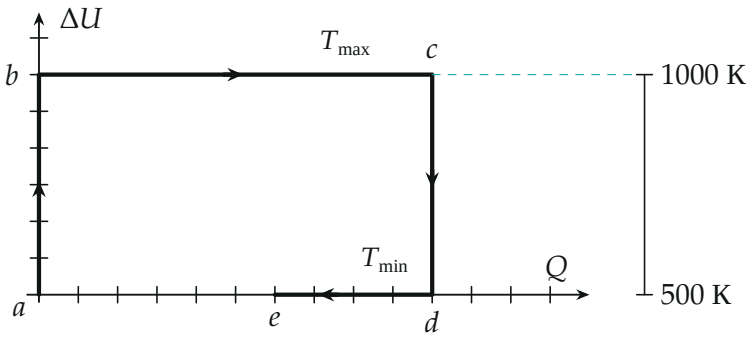
Обозначения. ΔU — изменение внутренней энергии с начала процесса (в состоянии *a* оно равно нулю), Q — теплота, сообщённая газу с начала процесса (отрицательное изменение Q на участке — газ отдаёт

теплоту), A — работа газа с начала процесса. Первое начало термодинамики для процесса от состояния a до текущего: $Q = \Delta U + A$. Для одноатомного идеального газа $\Delta U = \frac{3}{2}\nu R\,\Delta T$, поэтому ΔU и температура меняются вместе; ν не меняется.

1. Читаем график по участкам. На каждом участке меняется одна из двух величин.

1. $a \to b$: $Q = 0$, ΔU растёт от 0 до 6 кДж. Теплоты нет, а внутренняя энергия увеличилась, значит, работу над газом совершали: $A = Q - \Delta U = -6$ кДж. Газ сжимают быстро, без теплообмена — адиабатическое сжатие; температура растёт.
2. $b \to c$: $\Delta U = 6$ кДж не меняется, Q растёт от 0 до 10 кДж. Внутренняя энергия постоянна — температура постоянна; газ получает 10 кДж теплоты и всю её отдаёт в работу: $A = +10$ кДж. Изотермическое расширение.
3. $c \to d$: $Q = 10$ кДж не меняется, ΔU падает с 6 до 0. Теплообмена нет, энергия уменьшается, значит, газ сам совершает работу $A = \Delta U_{\text{потеря}} = +6$ кДж. Адиабатическое расширение; температура падает.
4. $d \to e$: $\Delta U = 0$, Q уменьшается с 10 до 6 кДж — газ *отдаёт* 4 кДж. Температура постоянна, работа $A = -4$ кДж: изотермическое сжатие.

Обратите внимание: на $d \to e$ стрелка направлена влево — накопленная теплота Q убывает, газ отдаёт теплоту, хотя ΔU при этом не меняется.

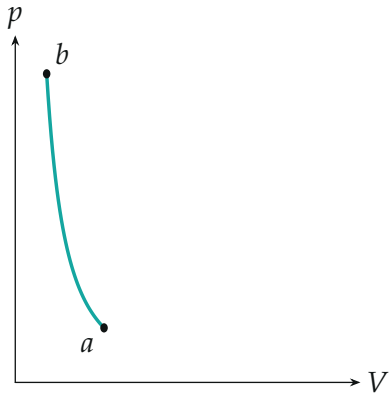


Тот же график со шкалой температуры справа: $\Delta U = 0$ — это $T_{\min}$, $\Delta U =$

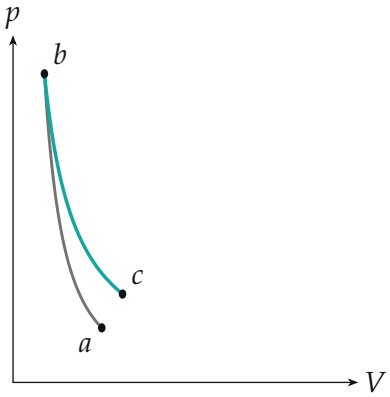
6 кДж — $T_{\max}$. Горизонталь b–c лежит на $T_{\max}$, горизонталь d–e — на $T_{\min}$.

2. Температуры. Внутренняя энергия ΔU не уходит ниже нуля, так что $T \geq T_a$ на всём процессе. Минимальная температура поэтому достигается в состоянии a и на всём уровне $\Delta U = 0$ — в d и e: $T_a = T_d = T_e = T_{\min} = 500$ К. Максимальная — на уровне $\Delta U = 6$ кДж, на участке b–c: $T_b = T_c = T_{\max} = 1000$ К. Проверим, что данные согласованы: $6\text{ кДж} = \frac{3}{2}\nu R\,(1000 - 500)$ К даёт $\nu R = 8$ Дж/К, то есть $\nu \approx 0{,}96$ моль — разумное число (около моля).

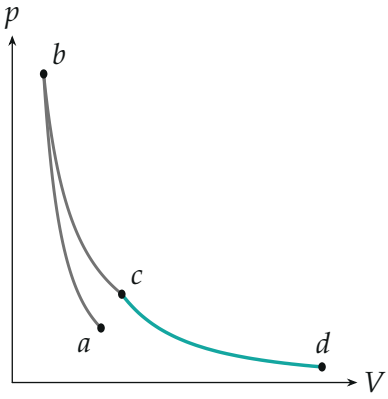
3. Форма линий на p–V. Изотерма — гипербола $p \sim 1/V$. Адиабата одноатомного газа — $p \sim V^{-5/3}$ (показатель $\gamma = 5/3$), она круче изотермы: при сжатии на адиабате давление растёт быстрее, чем на изотерме, потому что вместе с объёмом растёт и температура. Строим по шагам, начиная с a; каждый шаг рисуем новым цветом.



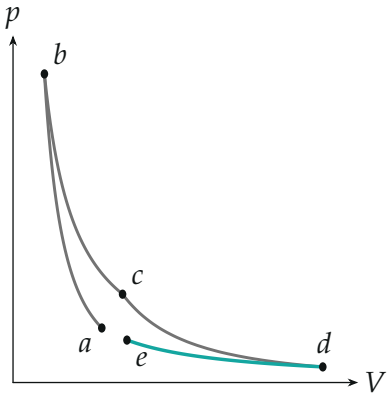
1) $a \to b$



2) $b \to c$



3) $c \to d$



4) $d \to e$

Построение по шагам (положение точек вычислено по данным графика, шкалы условные). Серым — уже построенные участки, бирюзовым — новый.

4. Замыкается ли процесс. Нарисованная картинка выглядит как цикл Карно, и проверить, действительно ли e совпадает с a, надо числами. Тот факт, что оба состояния лежат на одной изотерме $T_{\min}$, ещё не значит, что они одно и то же состояние: на изотерме много точек. Найдём работу газа за весь процесс двумя способами и сравним.

Способ 1 — первое начало. Для всего процесса от a до e внутренняя энергия вернулась к исходной: $\Delta U = 0$ (у e та же температура, что у a). Значит $A = Q$, где Q — теплота, накопленная к концу: на графике у e по оси Q стоит 6 кДж. Поэтому

$$A_{a\to b\to c\to d\to e} = Q_e = 6\text{ кДж}.$$

Проверка суммой участков: $-6 + 10 + 6 - 4 = 6$ кДж.

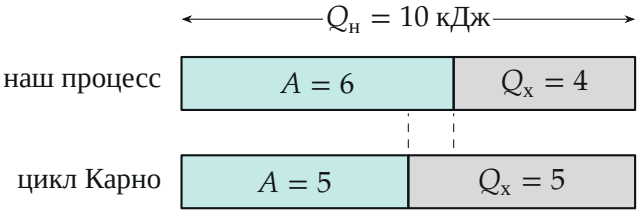
Способ 2 — цикл Карно. Предположим, что процесс замкнут и e совпадает с a. Тогда это цикл Карно (две адиабаты и две изотермы) с нагревателем $T_{\max}$ и холодильником $T_{\min}$. Его КПД

$$\eta = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max}} = 0{,}5,$$

теплоту $Q_{\text{н}} = 10$ кДж газ получил на изотерме b–c, поэтому работа за

цикл

$$A_{\text{Карно}} = \eta\, Q_{\text{н}} = 5\ \text{кДж}, \qquad Q_{\text{х}} = Q_{\text{н}} - A_{\text{Карно}} = 5\ \text{кДж}.$$

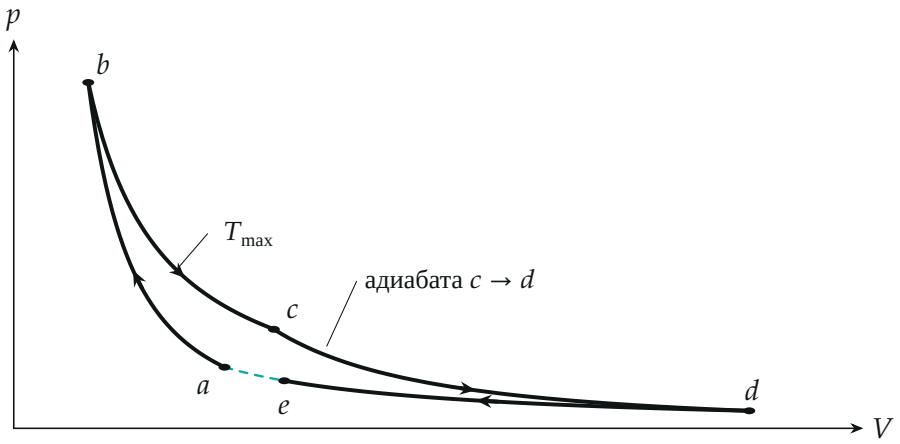


Нагреватель отдаёт газу 10 кДж. В цикле Карно газ отдавал бы холодильнику 5 кДж и совершал бы 5 кДж работы; в нашем процессе он успевает отдать только 4 кДж.

5. Вывод. Работы не совпали: $6 \neq 5$ кДж. Следовательно, процесс не замкнут: e не совпадает с a. Физически: цикл Карно потребовал бы отдать холодильнику 5 кДж при сжатии на нижней изотерме, а график отдаёт лишь 4 кДж. Изотермическое сжатие $d \to e$ кончилось раньше, чем газ дошёл до объёма V_a: газ в e занимает больший объём и имеет меньшее давление, чем в a, то есть $V_e > V_a$, $p_e < p_a$. Сжимать дальше, до a, нужно было бы ещё на 1 кДж, и тогда процесс замкнулся бы — работа тоже стала бы 5 кДж.

Второй способ того же вывода, через объёмы. Теплота на изотерме $Q = \nu RT \ln(V_{\text{кон}}/V_{\text{нач}})$, а у двух адиабат a–b и c–d одинаковые отношения температур, значит, $V_c/V_b = V_d/V_a$. Тогда $Q_{\text{х}}/Q_{\text{н}} = T_{\min}/T_{\max}$, то есть $Q_{\text{х}} = 5$ кДж, если замкнуть до a, а получается 4. Числа: $\nu RT_{\max} = 8$ кДж, $\nu RT_{\min} = 4$ кДж, поэтому $\ln(V_c/V_b) = 10/8 = 1{,}25$, $\ln(V_d/V_e) = 4/4 = 1$, $\ln(V_d/V_a) = \ln(V_c/V_b) = 1{,}25$, откуда $V_e/V_a = e^{0{,}25} \approx 1{,}28$.

6. Итоговый график. На графике $p(V)$: адиабата $a \to b$ (вверх-влево, круто), изотерма $b \to c$ (вниз-вправо, положе), адиабата $c \to d$ (круче изотермы), нижняя изотерма $d \to e$ влево — и она не доходит до продолжения адиабаты $a \to b$, останавливаясь в точке e правее и ниже a. Пунктиром — недостающий кусок изотермы до a.



Итоговый график $p(V)$ в условных единицах; кривые построены по числам задачи. Изотермы: $b \to c$ при T_{max} и нижняя $d \to e$ при T_{min}. Пунктиром — участок изотермы $e \to a$, которого в процессе нет.

Проверка. Размерность: ΔU, Q и A — в килоджоулях, T — в кельвинах, отношения температур безразмерны. Предел: если бы $d \to e$ дошёл до значения $Q = 5$ кДж, то $A = 5 = A_{\text{Карно}}$ и $e = a$, процесс стал бы замкнутым циклом Карно, как и ожидает критерий. Числовой контроль: по вычисленным объёмам ($V_b = 1$, $V_a = 2{,}83$, $V_c = 3{,}49$, $V_d = 9{,}87$, $V_e = 3{,}63$) площадь под изотермой b–c равна $8 \ln 3{,}49 = 10$ кДж, под d–e — $4 \ln(9{,}87/3{,}63) = 4$ кДж: в точности данные графика.

Физический смысл. Газ побывал в цикле Карно, но не завершил его: не успел отдать последний килоджоуль теплоты холодильнику, и поэтому работа за процесс на килоджоуль больше, чем дал бы замкнутый цикл.

Ответ. Процесс не замкнут: $A = 6$ кДж, а для замкнутого цикла Карно при $Q_н = 10$ кДж было бы 5 кДж. График $p(V)$: адиабатическое сжатие $a \to b$, изотермическое расширение $b \to c$, адиабатическое расширение $c \to d$, изотермическое сжатие $d \to e$, где e правее и ниже a (см. рисунок).