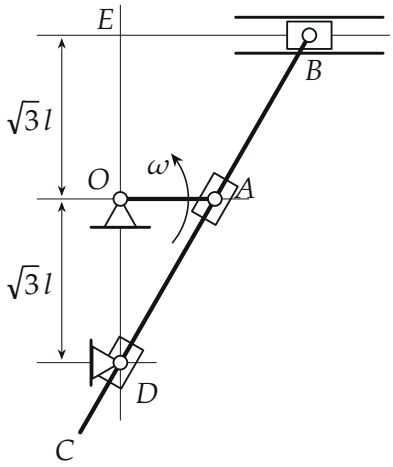
Кривошипно-кулисный механизм

Задача 6. [ИОШ 2022/23, 11 класс, задача 6] Кривошипно-кулисный механизм состоит из кривошипа OA — рычага, который может вращаться вокруг неподвижной оси O, ползуна B — детали, которая может двигаться вдоль направляющих, кулисы BC — стержня, шарнирно соединённого с ползуном B, и двух поворотных втулок A и D, в которых кулиса может скользить без трения (см. рисунок). Кривошип OA вращается (в некоторых пределах) с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси O. Найти мгновенную скорость и мгновенное ускорение ползуна B в тот момент времени, когда кривошип перпендикулярен отрезку OD. Длина кривошипа OA равна l, $OE = OD = \sqrt{3}l$ (см. рисунок).

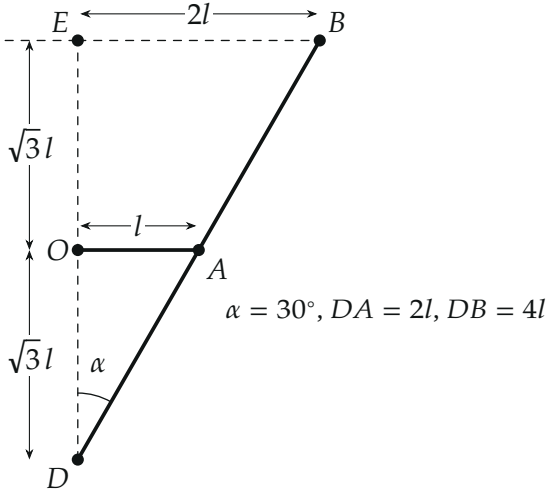


▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на кинематику механизма со связями. Кулиса BC — жёсткий стержень: одним концом она шарнирно сидит на ползуне B, который ездит только по горизонтали, и при этом проходит через две втулки — неподвижную D и подвижную A, надетую на конец кривошипа. Стало быть, положение кулисы однозначно определено положением кривошипа: кулиса всегда лежит на прямой DA, а точка B — там, где эта прямая пересекает горизонталь направляющих. Главная идея — выразить положение B через угол кривошипа (подобие треугольников), а затем найти скорость и ускорение как скорость

изменения координаты: возьмём малые интервалы времени до и после данного момента.

Обозначения. Начало координат — в точке O, ось x вдоль направляющих (вправо), ось y вверх. φ — угол кривошипа с горизонталью, $\varphi = \omega t$ (в данный момент $t = 0$ и $\varphi = 0$, кривошип лежит горизонтально, а значит, перпендикулярен OD). Вращение — против часовой стрелки, как показывает стрелка на рисунке. x_B — координата ползуна, Δt — малый интервал времени.

1. Геометрия в данный момент. Точки: $A = (l;\, 0)$, $D = (0;\, -\sqrt{3}\,l)$, направляющие — на высоте $y = \sqrt{3}\,l$ (отрезок $OE = \sqrt{3}\,l$). Прямоугольные треугольники DOA и DEB подобны (общий угол при D, оба прямоугольные), отношение катетов $OD : OA = \sqrt{3} : 1$, значит, угол кулисы с вертикалью $\alpha = 30°$ ($\operatorname{tg}\alpha = 1/\sqrt{3}$), $DA = 2l$. Далее $EB = OA \cdot DE/DO = l \cdot 2\sqrt{3}\,l/(\sqrt{3}\,l) = 2l$ и $DB = 2\,DA = 4l$: точка A — середина отрезка DB (середина той части кулисы, что между D и B).



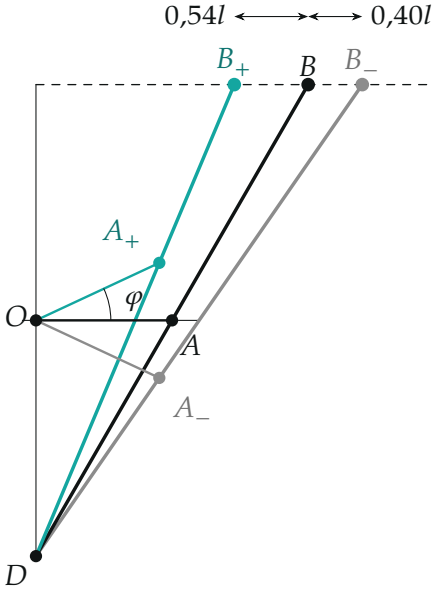
Данный момент: треугольники DOA и DEB подобны, $EB = 2l$, точка A — середина DB.

2. Положение ползуна в произвольный момент. Пусть кривошип повёрнут на угол φ: $A = (l\cos\varphi;\, l\sin\varphi)$. Кулиса лежит на прямой DA и пересекает горизонталь $y = \sqrt{3}\,l$ в точке B. Рассмотрим два подобных

прямоугольных треугольника с вершиной в D: малый (гипотенуза DA, вертикальный катет $l\sin\varphi + \sqrt{3}\,l$, горизонтальный $l\cos\varphi$) и большой (гипотенуза DB, вертикальный катет $2\sqrt{3}\,l$, горизонтальный x_B). Отношения горизонтального катета к вертикальному равны:

$$\frac{x_B}{2\sqrt{3}\,l} = \frac{l\cos\varphi}{l\sin\varphi + \sqrt{3}\,l} \quad\Longrightarrow\quad x_B = \frac{2\sqrt{3}\,l\cos\varphi}{\sqrt{3}+\sin\varphi}.$$

Проверка: $\varphi = 0$ даёт $x_B = 2l$, как в пункте 1.



Положения за два соседних интервала времени (угол $\varphi = 25°$ взят крупным для наглядности, координаты вычислены по формуле): до данного момента (серый, $\varphi = -25°$), данный момент (чёрный) и после (бирюзовый, $\varphi = +25°$).

3. Скорость. Выберем малый интервал Δt и угол $\varphi = \omega\Delta t \ll 1$. В моменты $-\Delta t$ и $+\Delta t$ кривошип повёрнут на $-\varphi$ и $+\varphi$, а из пункта 2 с точностью до малых второго порядка ($\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1 - \varphi^2/2$)

$$x_\pm = \frac{2\sqrt{3}\,l\cos\varphi}{\sqrt{3}\pm\sin\varphi} = \frac{2l\cos\varphi}{1\pm\varphi/\sqrt{3}}.$$

Скорость в данный момент — среднее за интервал $2\Delta t$, симметричный относительно него (так ошибка сокращается). Разность координат:

$$x_+ - x_- = 2l\cos\varphi\left(\frac{1}{1+\varphi/\sqrt{3}} - \frac{1}{1-\varphi/\sqrt{3}}\right)$$
$$= -2l\cos\varphi\cdot\frac{2\varphi/\sqrt{3}}{1-\varphi^2/3} \approx -\frac{4\,l\,\varphi}{\sqrt{3}}.$$

Отсюда

$$v_x = \frac{x_+ - x_-}{2\Delta t} = -\frac{2\,l\,\varphi}{\sqrt{3}\,\Delta t} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\,l\omega.$$

Знак минус: ползун B движется влево, к линии OE. Это видно и на рисунке: при вращении кривошипа вверх конец кулисы смещается влево.

4. Ускорение. Скорость на первом интервале (от $-\Delta t$ до 0) — $(x_0 - x_-)/\Delta t$, на втором — $(x_+ - x_0)/\Delta t$; интервалы отстоят на Δt, поэтому

$$a_x = \frac{(x_+ - x_0) - (x_0 - x_-)}{\Delta t^2} = \frac{x_+ + x_- - 2x_0}{\Delta t^2}.$$

Подставим $x_0 = 2l$ и $x_\pm$ из пункта 3. Сумма

$$x_+ + x_- = 2l\cos\varphi\cdot\frac{2}{1-\varphi^2/3} \approx 4l\Big(1-\frac{\varphi^2}{2}\Big)\Big(1+\frac{\varphi^2}{3}\Big) \approx 4l\Big(1-\frac{\varphi^2}{6}\Big),$$

поэтому $x_+ + x_- - 2x_0 \approx -\dfrac{2}{3}\,l\varphi^2$ и

$$a_x = -\frac{2}{3}\,\frac{l\varphi^2}{\Delta t^2} = -\frac{2}{3}\,l\omega^2.$$

Ускорение направлено влево, так же, как и скорость: ползун в этот момент разгоняется. Направление вращения организаторы словами не называют, оно задано только стрелкой ω на рисунке (против часовой стрелки). При обратном вращении скорость сменила бы знак (вправо, тот же модуль), а ускорение — нет: a_x зависит от φ^2, оно по-прежнему

влево, и ползун бы тормозил. Модули ответа от направления не зависят.

Обратите внимание: в $x_\pm$ мы сохранили члены второго порядка по φ. Если бы мы оставили $\cos\varphi \approx 1$, то $x_+ + x_-$ дало бы $4l$ с точностью до φ^2, и ускорение пропало бы совсем. Именно малая поправка $1 - \varphi^2/2$ у косинуса даёт ответ, хотя в скорости она не нужна.

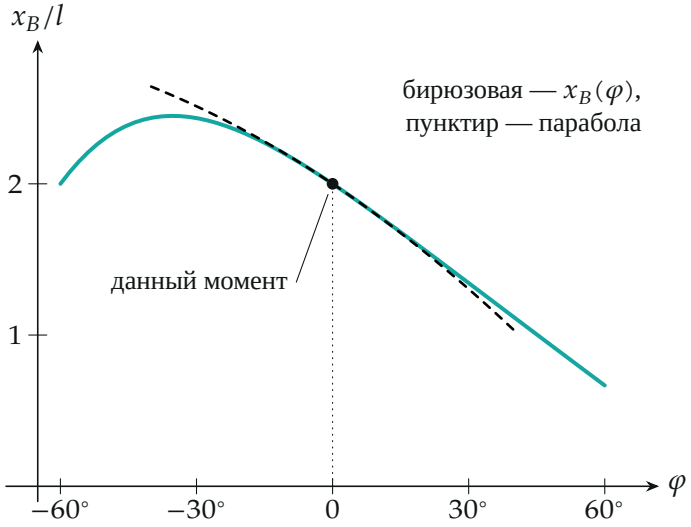


График $x_B(\varphi)$ по формуле пункта 2 и парабола $x_B \approx 2l - \frac{2}{\sqrt{3}}l\varphi - \frac{1}{3}l\varphi^2$, к которой сводятся пункты 3 и 4 (φ в радианах). Кривая в точке $\varphi = 0$ убывает (скорость < 0) и обращена выпуклостью вверх.

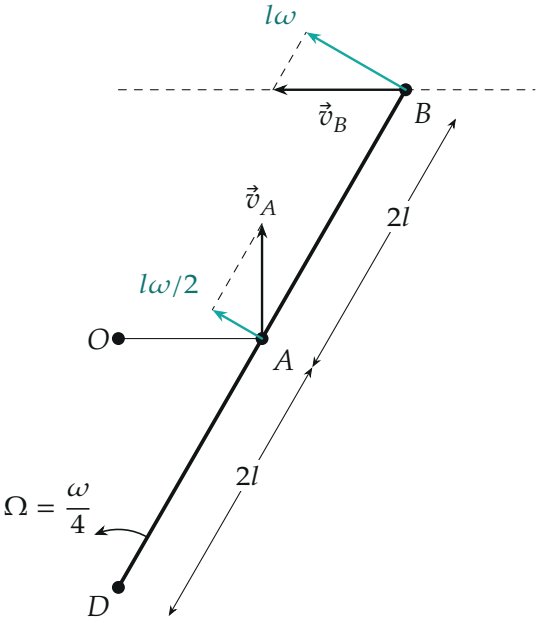
5. Проверка скорости вторым способом — через вращение кулисы. Кулиса проходит через неподвижную втулку D, поэтому точка кулисы в D может скользить только вдоль кулисы, а составляющая скорости любой её точки, перпендикулярная кулисе, пропорциональна расстоянию до D: $v_\perp = \Omega \cdot r$, где Ω — угловая скорость кулисы. Скорость втулки A — это скорость конца кривошипа: $v_A = l\omega$, перпендикулярно OA, то есть вертикально вверх. Угол между вертикалью и нормалью к кулисе 60° (кулиса наклонена к горизонтали на 60°), поэтому

$$(v_A)_\perp = l\omega\cos 60^\circ = \frac{l\omega}{2}, \qquad \Omega = \frac{(v_A)_\perp}{DA} = \frac{l\omega/2}{2l} = \frac{\omega}{4}.$$

Для точки B: $(v_B)_\perp = \Omega \cdot DB = \dfrac{\omega}{4} \cdot 4l = l\omega$. Ползун движется только по горизонтали, а угол между горизонталью и нормалью к кулисе 30°, поэтому $v_B \cos 30^\circ = l\omega$:

$$v_B = \frac{l\omega}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}\, l\omega.$$

Результат совпал с пунктом 3. Направление: кулиса вращается против часовой стрелки, ползун — влево.



Составляющие скоростей, перпендикулярные кулисе (бирюзовые): у A — $l\omega/2$, у B — $l\omega$; отношение равно отношению расстояний до D: $DB/DA = 2$.

Проверка. Размерность: $l\omega$ — скорость, $l\omega^2$ — ускорение. Второй способ для ускорения — точная производная координаты из пункта 2:

$$\frac{dx_B}{d\varphi} = -\frac{2\sqrt{3}\,l\,(\sqrt{3}\sin\varphi + 1)}{(\sqrt{3} + \sin\varphi)^2}, \qquad \frac{d^2x_B}{d\varphi^2} = -\frac{2\sqrt{3}\,l\cos\varphi\,(1 - \sqrt{3}\sin\varphi)}{(\sqrt{3} + \sin\varphi)^3}.$$

При $\varphi = 0$ они равны $-\dfrac{2l}{\sqrt{3}}$ и $-\dfrac{2l}{3}$. Так как $\omega = \text{const}$, то $v_x = \omega \dfrac{dx_B}{d\varphi}$ и $a_x = \omega^2 \dfrac{d^2x_B}{d\varphi^2}$ — получаем те же значения. Численная проверка (python): центральные разности с шагом 10^{-3} рад дают $-1{,}1547$ и $-0{,}6667$ в единицах $l\omega$ и $l\omega^2$.

Физический смысл. Кулиса вращается вокруг D медленнее кривошипа ($\omega/4$ против ω), но ползун сидит на расстоянии $4l$ от D, а втулка A — на расстоянии $2l$, и ползун движется быстрее конца кривошипа в $2/\sqrt{3} \approx 1{,}15$ раза.

Ответ. $v_B = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\, l\omega$; $\quad a_B = \dfrac{2}{3}\, l\omega^2$. Скорость и ускорение направлены вдоль направляющих (при вращении кривошипа против часовой стрелки — влево, к линии OE).