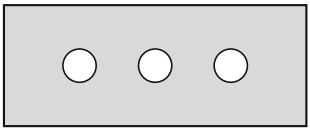
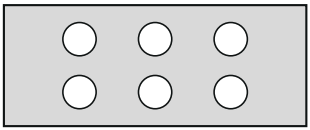
Пластина с отверстиями

Задача 1. [ИОШ 2022/23, 9 класс, задача 1] Если в пластине объёма V просверлить несколько отверстий, масса пластины станет равной m_1. Если увеличить количество отверстий в 2 раза, масса пластины станет равной m_2. Найти плотность пластины. Все отверстия сквозные, имеют одинаковый диаметр и просверлены перпендикулярно плоскости пластины.



n отверстий, масса m_1



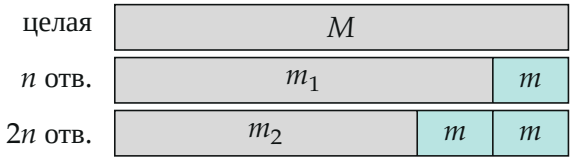
$2n$ отверстий, масса m_2

Поясняющий рисунок: одна и та же пластина объёма V с n и с $2n$ одинаковыми сквозными отверстиями (вид сверху).

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на плотность и массу. Плотность — масса целой пластины, делённая на её объём V. Масса целой пластины неизвестна, неизвестна и масса вещества, высверленного из одного отверстия. Но все отверстия одинаковы, поэтому каждое отверстие уносит одну и ту же массу. Два взвешивания дают два уравнения для двух неизвестных.

Обозначения. M — масса пластины без отверстий; ρ — плотность материала пластины; n — число отверстий в первом случае; Δm — масса вещества, высверленного из одного отверстия; $m = n\,\Delta m$ — масса, высверленная в первом случае.

1. Масса высверленного. Отверстия одинаковые и сквозные: каждое — цилиндр одного и того же объёма v (площадь круга, умноженная на толщину пластины). Пластина однородная, поэтому из каждого отверстия уходит масса $\Delta m = \rho v$. Из n отверстий уходит $m = n\Delta m$, из $2n$ — вдвое больше, $2m$.



Массы полосками: серое — то, что осталось от пластины, бирюзовое — высверленное. Второй случай отличается от первого ещё одной порцией m.

2. Два взвешивания. Закон сохранения массы: масса пластины с отверстиями равна массе целой пластины минус высверленное,

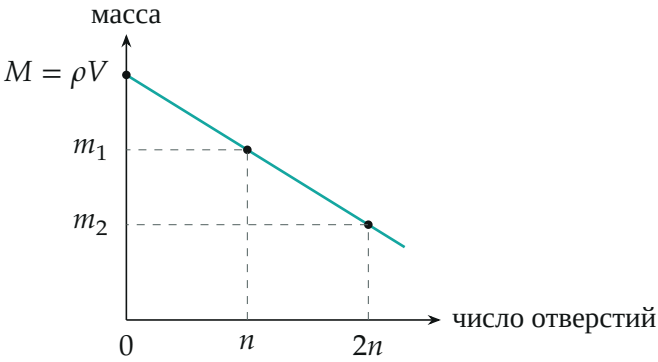
$$m_1 = M - m, \qquad m_2 = M - 2m.$$

Из рис. 2 видно: $m_1 - m_2 = m$ — разница взвешиваний и есть масса, высверленная в первом случае. Подставим в первое уравнение:

$$M = m_1 + m = m_1 + (m_1 - m_2) = 2m_1 - m_2.$$

3. Плотность. По определению плотности, масса целой пластины делённая на её объём:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{2m_1 - m_2}{V}.$$



Масса пластины убывает линейно с числом отверстий. Продолжение прямой через две измеренные точки до нуля отверстий даёт массу целой пластины $M = 2m_1 - m_2$.

4. Второй способ (график). Масса пластины — линейная функция числа отверстий k: $m(k) = M - k\Delta m$ (рис. 3). Точки $k = n$ и $k = 2n$ известны; точка $k = 0$ отстоит от $k = n$ на столько же, на сколько $k = n$ от $k = 2n$. Значит, при переходе от n к 0 масса растёт на ту же величину $m_1 - m_2$: $M = m_1 + (m_1 - m_2)$ — то же.



Разрез пластины: сквозные отверстия перпендикулярны её плоскости и имеют одинаковый диаметр d, поэтому все они — одинаковые цилиндры одного объёма.

Обратите внимание. V — объём пластины до сверления, а не объём оставшегося материала. Делить m_1 на V нельзя: это давало бы заниженную плотность, ведь часть объёма V уже пустая.

Проверка. Размерность: кг/м^3. Предел: если отверстия «нулевые», $m_1 = m_2 = M$, и $\rho = (2M - M)/V = M/V$ — верно. Знак: $m_2 < m_1$, поэтому $2m_1 - m_2 > m_1$ — целая пластина тяжелее просверленной. Численный пример: $M = 100$ г, по 5 г на отверстие, $n = 4$: $m_1 = 80$ г, $m_2 = 60$ г, $2m_1 - m_2 = 100$ г.

Ответ. $\rho = \dfrac{2m_1 - m_2}{V}$.