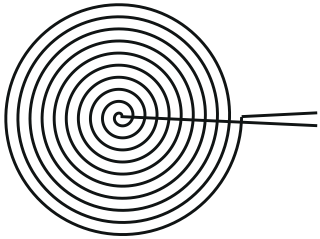
Спиральный нагреватель

Задача 4. [ИОШ 2022/23, 9 класс, задача 4] Нагревательный элемент нагревателя для детского питания представляет собой провод в тонкой изоляции, свернутый в плотную плоскую спираль радиуса R и большим числом витков N. Найти мощность, выделяемую в нагревателе при приложенном напряжении U. Удельное сопротивление материала проволоки ρ, площадь сечения проволоки S.

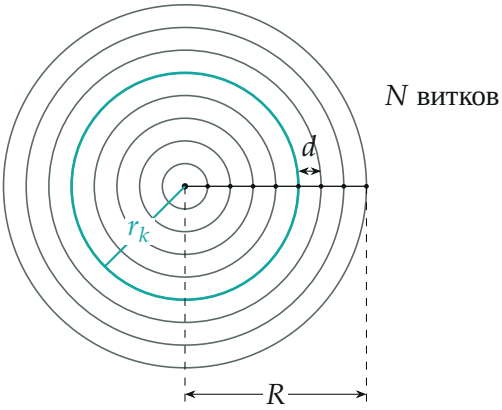


▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на закон Джоуля–Ленца и сопротивление проводника. Мощность при известном напряжении — U^2/r, сопротивление провода — $\rho L/S$. Вся физика сводится к геометрии: найти длину L провода, свёрнутого в плоскую спираль. Витков много, и каждый виток почти окружность; радиусы витков растут равномерно от нуля до R.

Обозначения. L — длина провода; r — его сопротивление; d — диаметр провода (с изоляцией); r_k — радиус k-го витка; P — мощность.

1. Шаг спирали. Спираль плотная: соседние витки касаются, и на радиусе R укладывается N толщин провода (рис. 2). Шаг спирали

$$d = \frac{R}{N}, \qquad r_k = k\,\frac{R}{N}, \quad k = 1, \ldots, N.$$



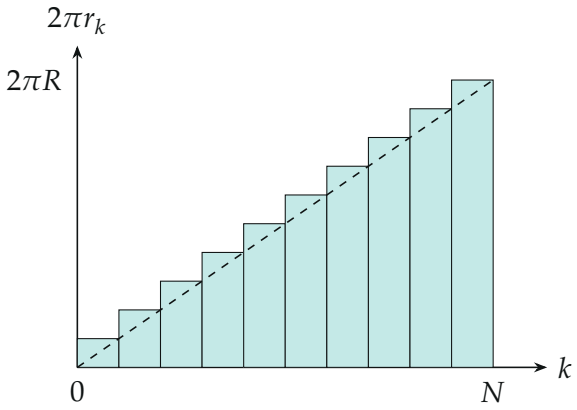
Спираль с большим числом витков заменяем набором окружностей с радиусами $r_k = kR/N$ (показаны 8 витков; один выделен). Шаг $d = R/N$ — толщина провода.

2. Длина провода. Каждый виток — почти окружность длины $2\pi r_k$:

$$L = \sum_{k=1}^{N} 2\pi r_k = \frac{2\pi R}{N}(1 + 2 + \cdots + N),$$

$$L = \frac{2\pi R}{N} \cdot \frac{N(N+1)}{2} = \pi R(N+1) \approx \pi RN.$$

При $N \gg 1$ единицей рядом с N пренебрегаем. Это то же самое, что N витков средней длины: средний радиус $R/2$, средняя длина витка πR.



Длины витков растут линейно; длина провода — сумма столбиков. Она почти равна площади треугольника: $\frac{1}{2}N \cdot 2\pi R = \pi RN$.

3. Второй способ — через площадь. Плотно уложенный провод толщины d закрывает весь круг радиуса R. Если его развернуть, получится полоска длины L и ширины d той же площади (рис. 4):

$$Ld = \pi R^2 \quad \Longrightarrow \quad L = \frac{\pi R^2}{d} = \pi RN.$$



Провод закрывает круг целиком: площадь круга равна площади развёрнутой полоски $L \cdot d$.

4. Сопротивление. Сопротивление однородного провода длины L и сечения S:

$$r = \frac{\rho L}{S} = \frac{\pi \rho RN}{S}.$$

5. Мощность. Закон Джоуля–Ленца для участка с напряжением U:

$$P = \frac{U^2}{r} = \frac{U^2 S}{\pi \rho RN}.$$

6. Через R и N. Провод круглый, диаметр $d = R/N$ (изоляция тонкая), поэтому сечение

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi R^2}{4N^2}, \qquad P = \frac{U^2}{\pi \rho RN} \cdot \frac{\pi R^2}{4N^2} = \frac{U^2 R}{4\rho N^3}.$$

Обе записи — один ответ; данное в условии S согласовано с R и N именно так.

Обратите внимание. Длина спирали — не $2\pi RN$ (все витки длиной внешнего), а вдвое меньше: внутренние витки короче. Ошибка вдвое в длине дала бы вдвое меньшую мощность.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{В}^2 \cdot \text{м}^2}{\text{Ом} \cdot \text{м} \cdot \text{м}} = \dfrac{\text{В}^2}{\text{Ом}} = \text{Вт}$. Пример: $R = 4$ см, $N = 20$, $S = 0{,}31$ мм^2 ($d = 2$ мм) — длина $\pi \cdot 0{,}04 \cdot 20 \approx 2{,}5$ м; сумма по виткам $\pi R(N + 1)$ даёт 2,64 м — отличие 5 %, и оно тем меньше, чем больше витков. Смысл: чем больше витков, тем длиннее и тоньше провод, тем больше сопротивление и тем меньше мощность ($P \propto 1/N^3$ при заданном R).

Ответ. $P = \dfrac{U^2 S}{\pi \rho R N} = \dfrac{U^2 R}{4\rho N^3}$.