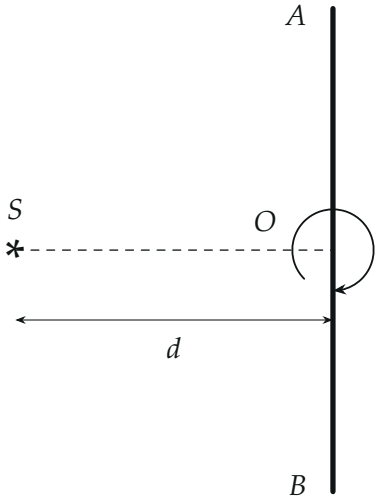
# Вращающееся зеркало маяка

**Задача 5.** [ИОШ 2022/23, 9 класс, задача 5] Для предотвращения столкновений судов с землёй в ночное время суток на берегу моря ставят маяки, которые должны предупредить корабли об опасном приближении к суше. Наиболее эффективно такие маяки работают, если они дают прерывистый световой сигнал. Рассмотрите следующую модель источника света для такого маяка. Неподвижный точечный источник света $S$ находится на расстоянии $d = 50$ см от зеркала $AB$ (см. рисунок). Зеркало вращается с угловой скоростью $\omega = 1$ рад/с вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через середину зеркала (через точку $O$ на рисунке). Найти скорость и ускорение изображения источника в зеркале.




▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на построение изображения в плоском зеркале и кинематику вращения. Изображение точки в плоском зеркале симметрично ей относительно плоскости зеркала. Ось вращения $O$ лежит в плоскости зеркала, а симметрия относительно прямой сохраняет расстояния до любой точки этой прямой. Поэтому изображение всё время находится на расстоянии $d$ от $O$ — движется по окруж-

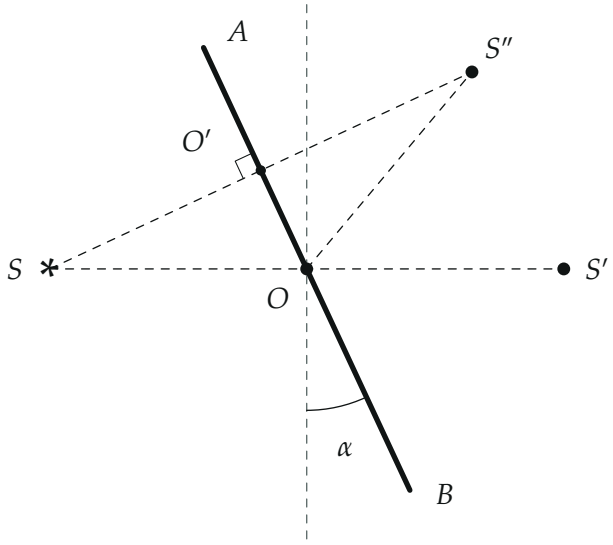
ности. Остаётся найти, с какой угловой скоростью оно бежит по этой окружности.

**Обозначения.** $S'$ — изображение при исходном положении зеркала, $S''$ — после поворота зеркала на угол $\alpha$; $O'$ — основание перпендикуляра из $S$ на повёрнутое зеркало; $\omega'$ — угловая скорость изображения; $v$, $a$ — его скорость и ускорение.

**1. Изображение лежит на окружности радиуса $d$.** По закону отражения изображение $S''$ лежит на перпендикуляре $SO'$ к зеркалу, по другую сторону от зеркала и на таком же расстоянии: $O'S'' = SO'$. Точка $O$ лежит на зеркале, поэтому прямоугольные треугольники $SO'O$ и $S''O'O$ равны (общий катет $OO'$, равные катеты $SO'$ и $O'S''$). Значит,

$$OS'' = OS = d$$

при любом угле поворота. Изображение движется по окружности с центром $O$ радиуса $R = d$; отрезок $SS'$ — её диаметр.

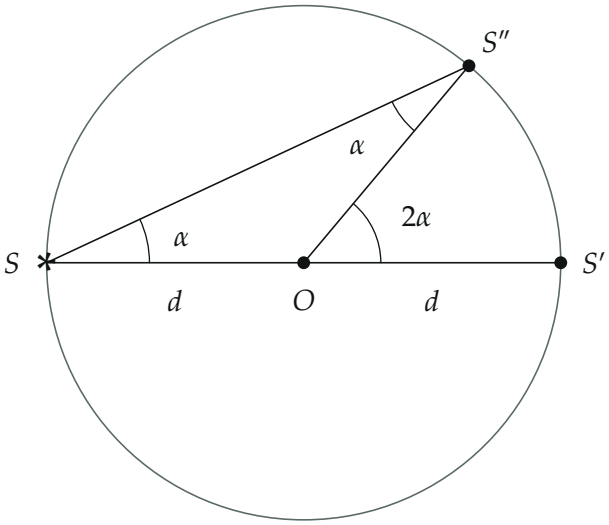



*Построение изображения: исходное положение зеркала — серый пунктир, изображение в нём $S'$; зеркало $AB$ повёрнуто на угол $\alpha$, изображение $S''$ симметрично $S$ относительно $AB$.*

**2. На какой угол поворачивается изображение.** Нормаль $SO'$ к зеркалу повернулась вместе с зеркалом на угол $\alpha$, поэтому $\angle O'SO = \alpha$. Треугольник $SOS''$ равнобедренный ($OS = OS'' = d$), значит $\angle OS''S = \angle OSS'' = \alpha$. Центральный угол $\angle S'OS''$ — внешний угол этого треугольника при вершине $O$ и равен сумме двух углов при основании:

$$\angle S'OS'' = 2\alpha.$$

Второй способ, короче: вписанный угол $S'SS'' = \alpha$ опирается на дугу $S'S''$, а центральный угол на ту же дугу вдвое больше.




*Треугольник $SOS''$ равнобедренный, поэтому центральный угол $S'OS''$ вдвое больше угла поворота зеркала.*

**3. Скорость изображения.** Зеркало поворачивается равномерно: $\alpha = \omega t$. Изображение поворачивается вокруг $O$ на угол $2\alpha = 2\omega t$, то есть равномерно с угловой скоростью

$$\omega' = 2\omega.$$

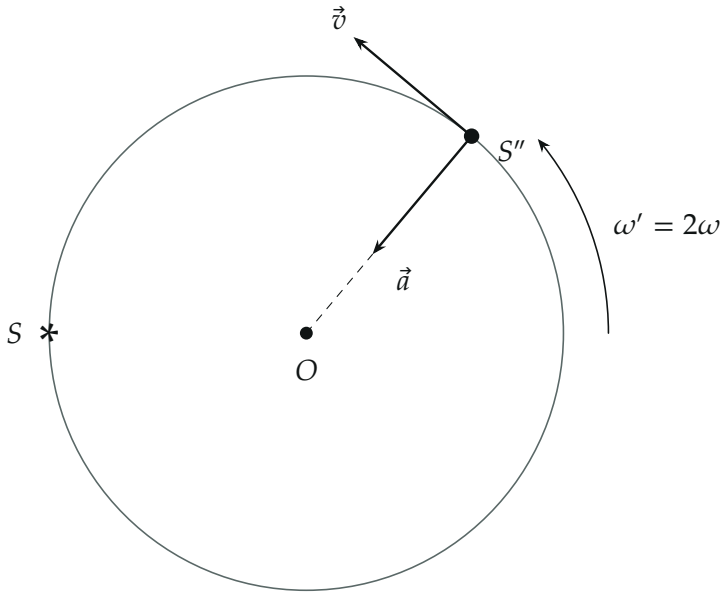
Для равномерного движения по окружности скорость направлена по ка-

сательной и по модулю равна

$$v = \omega' R = 2\omega d = 2 \cdot 1 \cdot 0{,}5 = 1 \text{ м/с}.$$

**4. Ускорение изображения.** Модуль скорости постоянен, поэтому касательного ускорения нет, есть только центростремительное, направленное к центру окружности — к оси $O$:

$$a = \omega'^2 R = 4\omega^2 d = 4 \cdot 1^2 \cdot 0{,}5 = 2 \text{ м/с}^2.$$




*Изображение бежит по окружности радиуса $d$ с угловой скоростью $2\omega$: скорость $\vec{v}$ по касательной, ускорение $\vec{a}$ к центру $O$.*

**Обратите внимание.** Скорость изображения вдвое больше, чем у точки зеркала на расстоянии $d$ от оси: при повороте зеркала на $\alpha$ отражённый луч и изображение поворачиваются на $2\alpha$. Отражает свет только одна сторона зеркала, поэтому изображение видно не всё время, а на части оборота — отсюда и прерывистый сигнал маяка; на ответ это не влияет.

**Ответ.** $v = 2\omega d = 1$ м/с, ускорение направлено к оси вращения зеркала, $a = 4\omega^2 d = 2$ м/с$^2$.

**Проверка.** Размерность: $[\omega d] = $ рад/с $\cdot$ м $=$ м/с, $[\omega^2 d] = $ м/с$^2$. Предел: $\omega = 0$ — зеркало стоит, изображение неподвижно, $v = a = 0$. Вычисление ещё раз через координаты: при повороте зеркала на $\alpha$ изображение находится в точке $O + d\,(\cos 2\alpha, \sin 2\alpha)$; производная по времени даёт $|\vec{v}| = 2\omega d$, вторая — $|\vec{a}| = 4\omega^2 d$.

**Физический смысл.** Изображение источника в плоском вращающемся зеркале обходит окружность радиуса $d$ вдвое быстрее зеркала.

**Ответ.** $v = 2\omega d = 1$ м/с; $a = 4\omega^2 d = 2$ м/с$^2$ (к оси вращения зеркала).