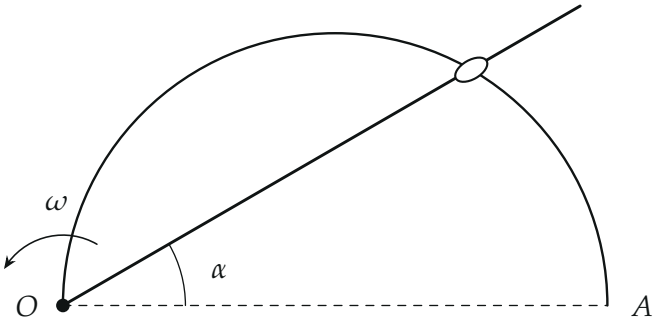
Колечко на стержне и полукольце

Задача 6. [ИОШ 2022/23, 9 класс, задача 6] Стержень вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через крайнюю точку сделанного из проволоки полукольца (точка O на рисунке). Стержень соединён с полукольцом колечком, которое может без трения скользить по стержню и полукольцу. Найти мгновенную угловую скорость колечка в тот момент времени, когда угол α между стержнем и диаметром, замыкающим полукольцо, равен 30° (см. рисунок; диаметр, замыкающий полукольцо, обозначен OA). При каких углах α больше угловая скорость колечка: при $\alpha \to 0$ или при $\alpha \to 90°$ и почему?



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на кинематику связей: колечко одновременно принадлежит стержню и полукольцу, поэтому его положение однозначно задано углом α. Ключ — геометрия окружности: угол α при точке O вписанный, и центральный угол, опирающийся на ту же дугу, вдвое больше. Значит, колечко бежит по полукольцу вокруг его центра вдвое быстрее, чем поворачивается стержень.

Обозначения. R — радиус полукольца, C — его центр (середина OA), K — колечко, $\varphi = \angle KCA$ — угол, задающий положение колечка на полукольце, $r = OK$ — расстояние от оси до колечка, v — скорость колечка.

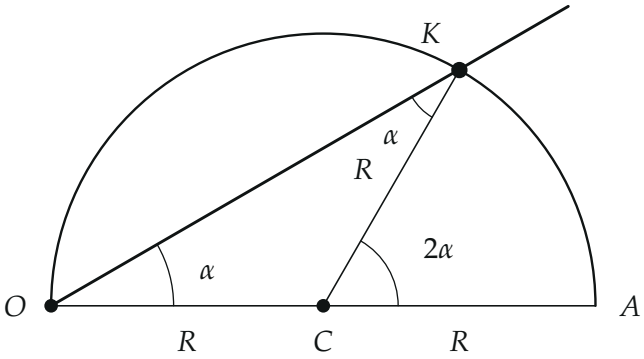
1. Какую угловую скорость ищем. Вокруг оси O колечко поворачивается вместе со стержнем: прямая OK — это и есть стержень, её угловая скорость равна ω при любом α. Содержательный вопрос — с какой

угловой скоростью колечко движется по своей траектории, полукольцу, то есть вокруг его центра C: $\omega_K = \dot{\varphi}$.

2. Связь углов φ и α. Треугольник OCK равнобедренный: $CO = CK = R$. Поэтому $\angle OKC = \angle KOC = \alpha$, а внешний угол $\angle KCA$ равен сумме двух углов при основании:

$$\varphi = 2\alpha.$$

Это то же самое, что теорема о вписанном угле: вписанный угол KOA равен половине центрального угла KCA, опирающегося на ту же дугу KA. Заодно из этого треугольника $r = OK = 2R\cos\alpha$.



Треугольник OCK равнобедренный, поэтому центральный угол KCA вдвое больше угла α между стержнем и диаметром.

3. Угловая скорость колечка. Стержень поворачивается равномерно: за малое время Δt угол α меняется на $\Delta\alpha = \omega\Delta t$ (стержень поворачивается к точке O против часовой стрелки, угол растёт). Угол $\varphi = 2\alpha$ меняется за то же время на $\Delta\varphi = 2\Delta\alpha$. Значит, угловая скорость колечка относительно центра полукольца

$$\omega_K = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = 2\omega,$$

а его скорость $v = \omega_K R = 2\omega R$. Ни то, ни другое от α не зависит; при $\alpha = 30°$ тоже $\omega_K = 2\omega$.

4. Проверка через сложение скоростей. Разложим скорость колечка на две составляющие: перпендикулярно стержню (колечко поворачивается вместе со стержнем вокруг O) и вдоль стержня (колечко скользит по нему). Поперечная составляющая — скорость точки стержня на расстоянии r от оси:

$$v_\perp = \omega r = 2\omega R\cos\alpha.$$

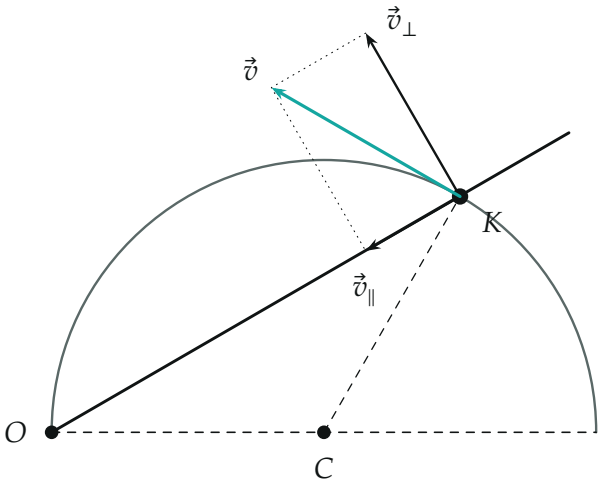
Продольная — скорость изменения длины $r = 2R\cos\alpha$: при повороте на $\Delta\alpha$ длина уменьшается на $2R\sin\alpha\,\Delta\alpha$, поэтому колечко скользит к точке O со скоростью

$$v_\parallel = 2\omega R\sin\alpha.$$

Составляющие перпендикулярны, по теореме Пифагора

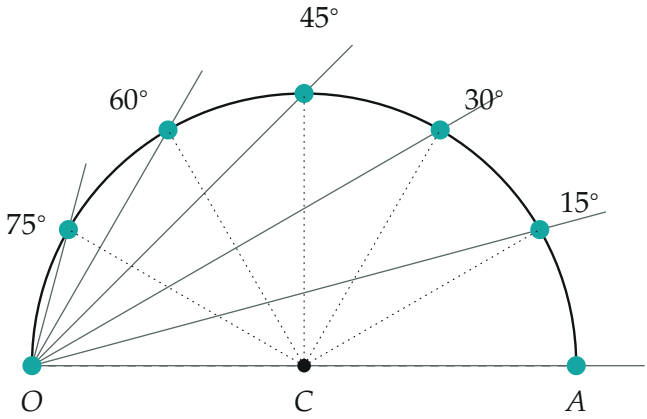
$$v = \sqrt{v_\perp^2 + v_\parallel^2} = 2\omega R\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 2\omega R,$$

и угловая скорость вокруг центра C снова $v/R = 2\omega$. Сумма $\vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel$ направлена по касательной к полукольцу, как и должно быть.



Скорость колечка $\vec{v}$ (бирюзовая) — сумма скорости $\vec{v}_\perp$ вращения вместе со стержнем и скорости $\vec{v}_\parallel$ скольжения вдоль стержня; она касается полукольца.

5. Сравнение $\alpha \to 0$ и $\alpha \to 90°$. Угловая скорость колечка 2ω одна и та же при всех α, поэтому ни при $\alpha \to 0$, ни при $\alpha \to 90°$ она не больше. Меняется лишь то, из чего она складывается: при $\alpha \to 0$ колечко далеко от оси ($r \to 2R$) и почти не скользит — скорость даёт поворот стержня; при $\alpha \to 90°$ колечко подходит к оси ($r \to 0$), поворот почти ничего не даёт, зато колечко быстро скользит по стержню. На рисунке ниже стержень поворачивается каждый раз на 15°, а колечко проходит одинаковые дуги по 30°.



Положения стержня (серые) через каждые 15° и колечка (бирюзовые точки): колечко проходит равные дуги по 30° — его угловая скорость вокруг центра C постоянна и равна 2ω.

Обратите внимание. Вокруг оси O колечко вращается вместе со стержнем, с угловой скоростью ω; ответ 2ω — угловая скорость относительно центра полукольца, по которому колечко движется. Без этой оговорки вопрос не имеет содержания.

Ответ. $\omega_K = 2\omega$ при $\alpha = 30°$ и при любом другом α; ни при $\alpha \to 0$, ни при $\alpha \to 90°$ угловая скорость не больше.

Проверка. Размерность: $[\omega_K] = [\omega] =$ рад/с. Предел: при повороте стержня на 90° (от $\alpha = 0$ до $\alpha = 90°$) колечко проходит всё полукольцо от A до O, угол φ меняется на 180° — вдвое больше, что согласуется с $\omega_K = 2\omega$. Второй способ (сложение скоростей, п. 4) дал тот же результат.

Физический смысл. Колечко на стыке вращающегося стержня и окружности, проходящей через ось, бежит по окружности равномерно, вдвое быстрее стержня.

Ответ. $\omega_{\text{К}} = 2\omega$ (относительно центра полукольца) при $\alpha = 30°$ и при любом α; угловая скорость колечка от α не зависит, поэтому при $\alpha \to 0$ и при $\alpha \to 90°$ она одинакова.