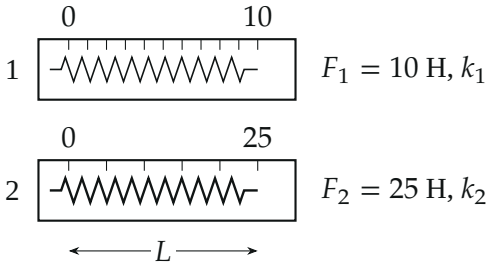
Два динамометра

Задача 1. [ИОШ 2023/24, отборочный этап, 10 класс, задача 1] У инженера есть два пружинных динамометра, имеющих шкалу одинакового размера, но рассчитанных на измерение разных сил: максимальные силы, которые могут измерить динамометры, составляют $F_1 = 10$ Н и $F_2 = 25$ Н. Пружины динамометров меняют местами, соединяют их последовательно и растягивают. При этом показания второго динамометра (со шкалой на максимальную силу F_2) составляют $f_2 = 15$ Н. Каковы в этом случае показания f_1 первого динамометра (со шкалой на максимальную силу F_1)?



Поясняющий рисунок: шкалы одной длины L, но в первом динамометре мягкая пружина k_1, во втором — жёсткая k_2.

▲ **Решение. Что происходит.** Шкала динамометра проградуирована под его «родную» пружину: деление шкалы — это удлинение, а написанная у него сила — то, что даёт при этом удлинении родная пружина. После перестановки пружин каждый динамометр показывает неправильно: он измеряет удлинение чужой пружины, а пересчитывает его в силу по своей. Главная идея: при последовательном соединении на обе пружины действует одна и та же сила F; по показанию второго динамометра найдём F, по F — удлинение пружины в первом и его показание.

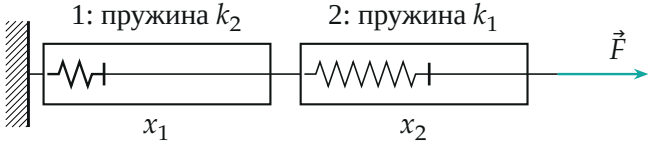
Обозначения. L — длина шкалы (одна у обоих); k_1, k_2 — жёсткости родных пружин первого и второго динамометров; F — истинная сила, растягивающая цепочку; x_1, x_2 — удлинения пружин, стоящих в первом и втором динамометре после перестановки.

1. Жёсткости пружин. Полная шкала — удлинение L под максимальной силой (закон Гука):

$$k_1 = \frac{F_1}{L}, \qquad k_2 = \frac{F_2}{L}.$$

Отношение жёсткостей равно отношению пределов шкал: $k_1/k_2 = F_1/F_2 = 0{,}4$. Показание динамометра с удлинением x по шкале: первый показывает $F_1 x/L$, второй — $F_2 x/L$, какая бы пружина в нём ни стояла.

2. Сила одинакова. Пружины соединены последовательно и невесомы, поэтому по третьему закону Ньютона каждая растянута одной силой F. Во втором динамометре стоит пружина k_1, её удлинение $x_2 = F/k_1$; в первом — пружина k_2, удлинение $x_1 = F/k_2$.



После перестановки: цепочку тянет сила F, обе пружины растянуты ею; мягкая пружина k_1 (во втором динамометре) удлиняется сильнее.

3. Истинная сила по показанию второго. Второй динамометр показывает

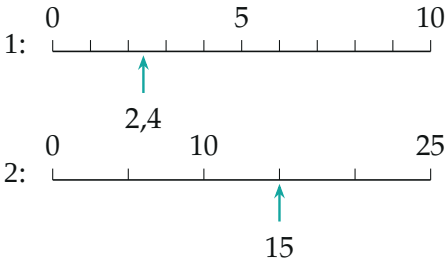
$$f_2 = \frac{F_2}{L} x_2 = \frac{F_2}{L} \cdot \frac{F}{k_1} = \frac{F_2}{F_1} F \quad \Rightarrow \quad F = \frac{F_1}{F_2} f_2 = \frac{10}{25} \cdot 15 = 6 \text{ Н}.$$

Второй динамометр завышает силу в $F_2/F_1 = 2{,}5$ раза: мягкая пружина растягивается сильно, а шкала рассчитана на жёсткую.

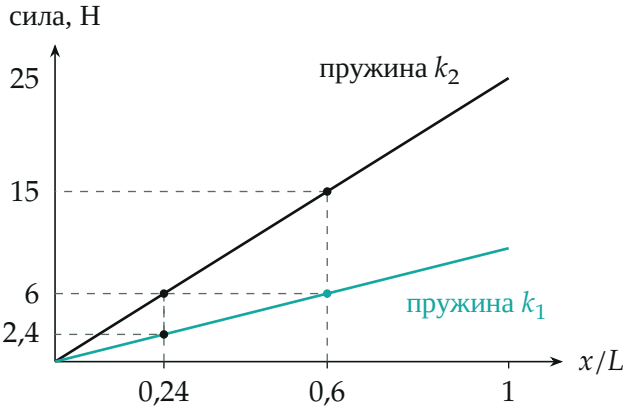
4. Показание первого. Первый динамометр показывает

$$f_1 = \frac{F_1}{L} x_1 = \frac{F_1}{L} \cdot \frac{F}{k_2} = \frac{F_1}{F_2} F = \frac{F_1^2}{F_2^2} f_2 = \frac{100}{625} \cdot 15 = 2{,}4 \text{ Н}.$$

Первый занижает силу в 2,5 раза: жёсткая пружина растягивается мало.



Стрелки на шкалах (в одном масштабе длины): первый динамометр стоит на 0,24 шкалы и показывает 2,4 Н, второй — на 0,6 шкалы и показывает 15 Н. Истинная сила в обоих 6 Н.



Закон Гука для двух пружин (чёрная — шкала второго динамометра, $25x/L$; бирюзовая — шкала первого, $10x/L$). Сила $F = 6$ Н растягивает мягкую пружину до $0{,}6L$ — второй динамометр показывает по своей шкале 15 Н; жёсткую — до $0{,}24L$, первый показывает по своей шкале 2,4 Н.

Обратите внимание. Показание — не сила, а удлинение, пересчитанное по шкале. Поэтому ответ не $f_1 = f_2$ (силы одинаковы, а показания нет) и не $F = 15$ Н: истинная сила 6 Н, а оба прибора врут в 2,5 раза в разные стороны.

Проверка. Размерность: $F_1^2 f_2 / F_2^2$ — Н. Предел: при $F_1 = F_2$ пружины одинаковы, перестановка ничего не меняет, и $f_1 = f_2$ — верно. Произведение показаний $f_1 f_2 = 2{,}4 \cdot 15 = 36 = F^2$: истинная сила — среднее геометрическое показаний, это симметричный второй способ найти F.

Ответ. $f_1 = \dfrac{F_1^2}{F_2^2} f_2 = 2{,}4$ Н.