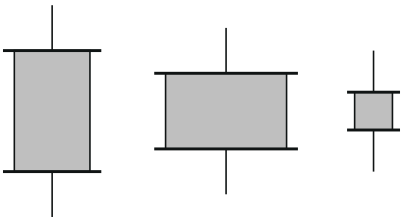
Фольга между электродами

Задача 2. [ИОШ 2023/24, отборочный этап, 10 класс, задача 2] Если тонкую металлическую фольгу в форме прямоугольника включить между двумя длинными электродами короткой стороной к электродам (левый рисунок), её сопротивление будет равно r_1. Если ту же фольгу включить между электродами длинной стороной к электродам (средний рисунок), её сопротивление будет равно r_2. Каким будет сопротивление такой же фольги в форме квадрата со стороной, вдвое меньшей короткой стороны прямоугольника, включённой в цепь так, как это показано на правом рисунке?



▲ **Решение. Что происходит.** Сопротивление тонкой фольги определяется законом $R = \rho l/S$: длина l — путь тока от электрода к электроду, сечение S — ширина фольги, умноженная на толщину. При повороте прямоугольника длина и ширина меняются ролями, а у квадрата они равны и сокращаются. Главная идея: сопротивление квадрата не зависит от его размера, а зависит только от материала и толщины, ρ/d, — и эту величину дают r_1 и r_2 вместе.

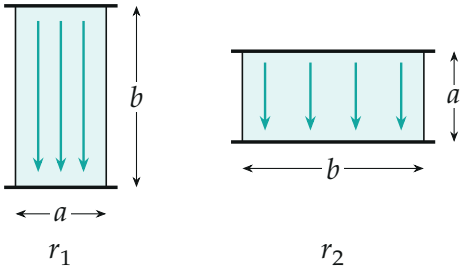
Обозначения. ρ — удельное сопротивление металла; d — толщина фольги; a — короткая сторона прямоугольника, b — длинная; x — сторона квадрата ($x = a/2$, но, как увидим, это не важно); r — искомое сопротивление.

1. Сопротивление в двух положениях. Электроды длинные и касаются всей стороны фольги, поэтому ток течёт перпендикулярно электродам равномерно по всей ширине. Левый рисунок: электроды касаются короткой стороны a, ток проходит длину b через сечение ad:

$$r_1 = \frac{\rho b}{ad}.$$

Средний рисунок: ток проходит длину a через сечение bd:

$$r_2 = \frac{\rho a}{bd}.$$



Ток (бирюзовые стрелки) идёт от электрода к электроду. Слева он проходит длинный путь b через узкое сечение ad, справа — короткий путь a через широкое сечение bd; толщина фольги d везде одна.

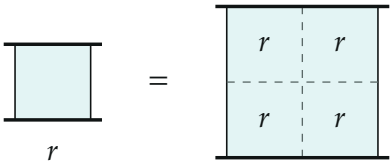
2. Комбинация, не зависящая от размеров. Перемножим r_1 и r_2: стороны a и b сократятся,

$$r_1 r_2 = \frac{\rho^2}{d^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho}{d} = \sqrt{r_1 r_2}.$$

3. Квадрат. У квадрата со стороной x путь тока x, сечение xd:

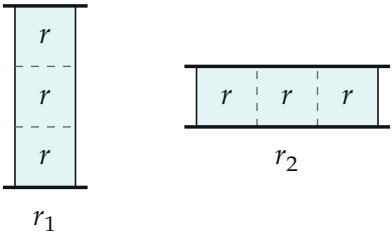
$$r = \frac{\rho x}{xd} = \frac{\rho}{d} = \sqrt{r_1 r_2}.$$

Сторона x сократилась — сопротивление квадрата фольги не зависит от его размера, поэтому «вдвое меньшая сторона» на ответ не влияет.



Почему размер квадрата не важен: квадрат вдвое больше режется на четыре таких же; два квадрата в столбце соединены последовательно ($2r$), два столбца — параллельно, итого снова r.

4. Второй способ — «квадраты». Пусть для наглядности $b = 3a$. Прямоугольник режется на три квадрата $a \times a$ с сопротивлением r каждый. Слева квадраты стоят друг за другом на пути тока — последовательно, $r_1 = 3r$; посередине они стоят рядом между электродами — параллельно, $r_2 = r/3$. Тогда $r_1 r_2 = r^2$, и $r = \sqrt{r_1 r_2}$ при любом отношении $b/a = n$: $r_1 = nr$, $r_2 = r/n$.



Прямоугольник $a \times 3a$ из трёх квадратов: по пути тока они соединены последовательно (слева) или параллельно (справа). Произведение $r_1 r_2 = r^2$.

Обратите внимание. Ни ρ, ни d, ни стороны прямоугольника не даны — и не нужны: всё сокращается в произведении $r_1 r_2$. Сопротивление квадрата фольги («сопротивление на квадрат») — характеристика самой фольги, её так и указывают в справочниках, в омах на квадрат.

Проверка. Размерность: $\sqrt{r_1 r_2}$ — Ом. Предел: если прямоугольник сам квадрат ($a = b$), то $r_1 = r_2$ и $r = r_1$ — верно. Ответ лежит между r_2 и r_1: квадрат «длиннее» по пути тока, чем фольга в среднем положении, и «короче», чем в левом.

Ответ. $r = \sqrt{r_1 r_2}$ (не зависит от размера квадрата).