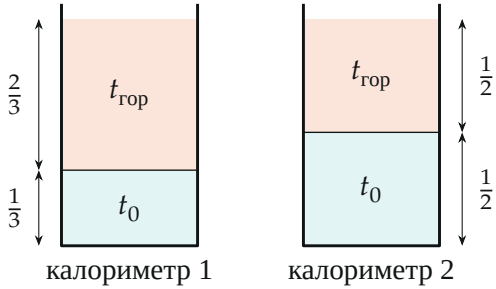
Два калориметра

Задача 3. [ИОШ 2023/24, отборочный этап, 10 класс, задача 3] Имеется два одинаковых теплоизолированных калориметра, частично заполненных водой комнатной температуры. Один калориметр заполнен водой на одну треть своего объёма, второй — наполовину. В калориметры до краев наливают горячую воду, и через некоторое время в них устанавливаются следующие температуры: $t_1 = 67\,^\circ\text{C}$ в первом и $t_2 = 56\,^\circ\text{C}$ — во втором. Найти комнатную температуру и температуру горячей воды. Теплоёмкостью калориметра и потерями тепла пренебречь.



Поясняющий рисунок: внизу — вода комнатной температуры t_0, сверху — долитая горячая вода $t_{гор}$; дроби — доли объёма калориметра.

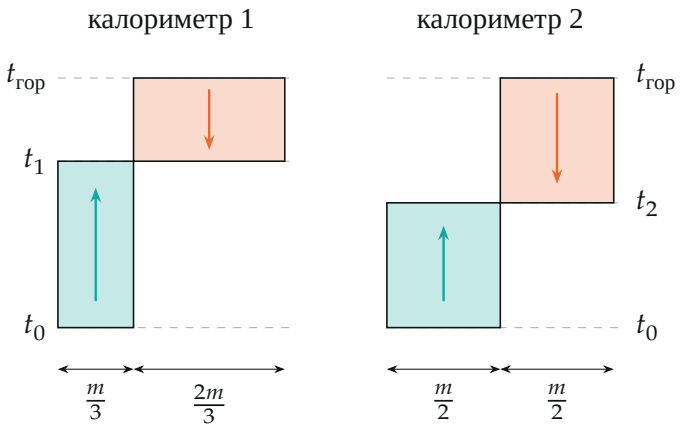
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на уравнение теплового баланса. В каждом калориметре холодная вода нагревается, горячая остывает, пока температуры не сравняются. Теплоизоляция и нулевая теплоёмкость калориметра означают: сколько теплоты отдала горячая вода, столько получила холодная. Неизвестных два (t_0 и $t_{гор}$), калориметров два — два уравнения.

Обозначения. m — масса воды в полном калориметре, c — удельная теплоёмкость воды, t_0 — комнатная температура, $t_{гор}$ — температура горячей воды. Калориметры одинаковые и заполняются до краёв, поэтому в обоих вся вода вместе имеет массу m.

1. Массы. В первом калориметре холодной воды $\frac{m}{3}$, горячей долили $m - \frac{m}{3} = \frac{2m}{3}$. Во втором холодной $\frac{m}{2}$, горячей тоже $\frac{m}{2}$.

2. Тепловой баланс для первого калориметра. Холодная вода получает $Q = c\,\frac{m}{3}\,(t_1 - t_0)$, горячая отдаёт $c\,\frac{2m}{3}\,(t_{\text{гор}} - t_1)$; потерь нет, поэтому

$$c\,\frac{m}{3}\,(t_1 - t_0) = c\,\frac{2m}{3}\,(t_{\text{гор}} - t_1) \quad \Rightarrow \quad t_1 - t_0 = 2\,(t_{\text{гор}} - t_1).$$

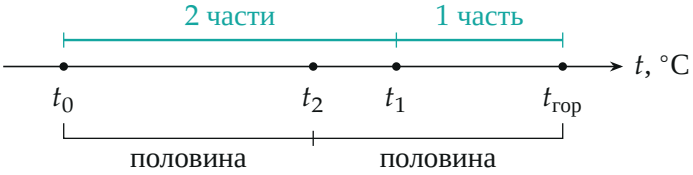


Тепловой баланс картинкой: ширина прямоугольника — масса порции воды, высота — изменение её температуры, площадь — полученная (бирюза) или отданная (морковь) теплота, делённая на c. В каждом калориметре площади равны.

3. Тепловой баланс для второго калориметра:

$$c\,\frac{m}{2}\,(t_2 - t_0) = c\,\frac{m}{2}\,(t_{\text{гор}} - t_2) \quad \Rightarrow \quad t_2 - t_0 = t_{\text{гор}} - t_2.$$

Масса m и теплоёмкость c сократились — они и не нужны. Смысл уравнений виден на оси температур: t_1 делит отрезок $[t_0;\, t_{\text{гор}}]$ в отношении $2 : 1$ (ближе к горячей, горячей воды больше), а t_2 стоит ровно посередине.



Ось температур: t_1 отстоит от t_0 вдвое дальше, чем от $t_{гор}$ (первый калориметр), t_2 — середина отрезка (второй калориметр). Точки поставлены по найденным значениям.

4. Решаем систему. Из пункта 3 $t_0 + t_{гор} = 2t_2$, из пункта 2 $t_0 + 2t_{гор} = 3t_1$. Вычтем первое из второго:

$$t_{гор} = 3t_1 - 2t_2 = 3 \cdot 67 - 2 \cdot 56 = 89\,^\circ\text{C},$$

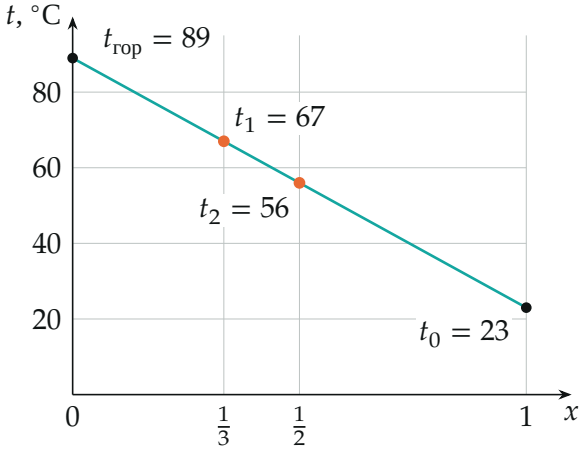
$$t_0 = 2t_2 - t_{гор} = 4t_2 - 3t_1 = 4 \cdot 56 - 3 \cdot 67 = 23\,^\circ\text{C}.$$

5. Второй способ — график. Пусть x — доля холодной воды в калориметре. Тот же тепловой баланс $c\,xm\,(t - t_0) = c\,(1-x)m\,(t_{гор} - t)$ даёт температуру смеси

$$t(x) = x\,t_0 + (1-x)\,t_{гор},$$

то есть t — линейная функция x. Опыт дал две точки этой прямой: $(\frac{1}{3};\ 67)$ и $(\frac{1}{2};\ 56)$. Наклон $\frac{56-67}{1/2-1/3} = -66\,^\circ\text{C}$; продлим прямую до $x = 0$ (одна горячая вода) и $x = 1$ (одна холодная):

$$t(0) = 67 + 66 \cdot \tfrac{1}{3} = 89\,^\circ\text{C}, \qquad t(1) = 56 - 66 \cdot \tfrac{1}{2} = 23\,^\circ\text{C}.$$



Температура смеси t в зависимости от доли холодной воды x — прямая. Две точки опыта (морковные) задают её; концы прямой — искомые $t_{гор}$ и t_0.

Обратите внимание. Горячей воды в калориметрах налито разное количество: $\frac{2m}{3}$ и $\frac{m}{2}$. Масса горячей воды — это не «сколько налили по условию», а «сколько поместилось до краёв»: m минус масса холодной.

Проверка. Подставим ответ: первый калориметр $\frac{1}{3}(67 - 23) = \frac{44}{3}$ и $\frac{2}{3}(89 - 67) = \frac{44}{3}$ — совпало; второй $\frac{1}{2}(56 - 23) = \frac{1}{2}(89 - 56) = 16{,}5$ — совпало. Порядок $t_0 < t_2 < t_1 < t_{гор}$ верный: где горячей воды больше (первый калориметр), там теплее. Комнатная температура 23 °C правдоподобна.

Ответ. Комнатная температура $t_0 = 4t_2 - 3t_1 = 23\,°C$; температура горячей воды $t_{гор} = 3t_1 - 2t_2 = 89\,°C$.