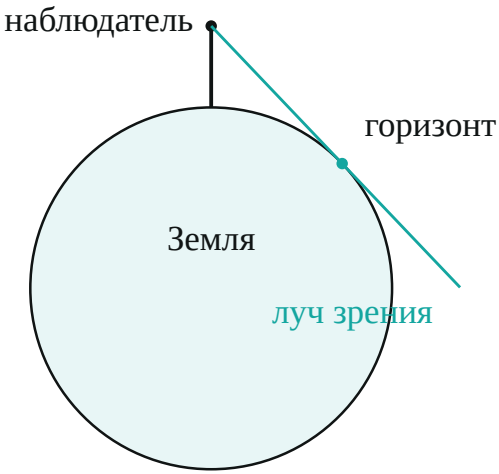
Расстояние до горизонта

Задача 4. [ИОШ 2023/24, отборочный этап, 10 класс, задача 4] Найти расстояние до видимого горизонта в открытом море, если точка его наблюдения находится на высоте $h = 10$ метров над уровнем моря. Видимым горизонтом называется линия, по которой небо кажется граничащим с поверхностью Земли. Из-за кривизны поверхности Земли расстояние до видимого горизонта конечно. Радиус Земли $R = 6400$ км.



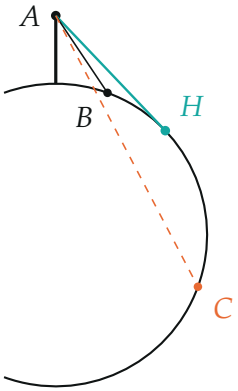
Поясняющий рисунок (высота наблюдателя сильно преувеличена): луч зрения к горизонту касается поверхности моря.

▲ **Решение. Что происходит.** Это геометрическая задача с оценкой малой величины. Наблюдатель видит поверхность моря до той точки, где луч зрения касается шара Земли: точки дальше закрыты выпуклостью Земли, а лучи, проходящие выше касательной, уже уходят в небо. Значит, горизонт — точка касания, и расстояние до него находим из прямоугольного треугольника.

Обозначения. O — центр Земли, A — глаз наблюдателя, H — точка горизонта (точка касания), $x = AH$ — искомое расстояние. Тогда $OH = R$, $OA = R + h$.

1. Почему горизонт — точка касания. Проведём из глаза A лучи к поверхности моря. Луч к точке B ближе H доходит до воды — эту

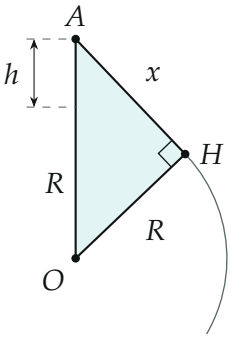
точку мы видим. Луч к точке C за H сначала упирается в выпуклость Земли — точка C не видна. Луч AH — граничный: он только касается поверхности, а всё, что выше него, — небо. На нём небо и «граничит» с морем.



Точку B ближе горизонта видно; луч к точке C за горизонтом проходит сквозь Землю (штрих), её не видно. Граница — касательная AH.

2. Прямоугольный треугольник. Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания: $OH \perp AH$. Треугольник OHA прямоугольный с прямым углом при H, гипотенуза $OA = R + h$. По теореме Пифагора

$$x^2 = (R + h)^2 - R^2 = 2Rh + h^2.$$



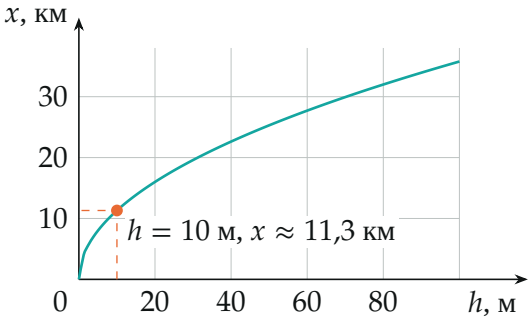
Треугольник OHA: катеты R и x, гипотенуза $R+h$; прямой угол при точке касания H.

3. Отбрасываем малое слагаемое. Сравним слагаемые: $\dfrac{h^2}{2Rh} = \dfrac{h}{2R} = \dfrac{10}{2\cdot 6{,}4\cdot 10^6} \approx 8\cdot 10^{-7}$. Слагаемое h^2 меньше $2Rh$ в миллион с лишним раз, и его можно отбросить:

$$x = \sqrt{2Rh + h^2} \approx \sqrt{2Rh} = \sqrt{2\cdot 6{,}4\cdot 10^6\cdot 10}\ \text{м} \approx 1{,}13\cdot 10^4\ \text{м} = 11{,}3\ \text{км}.$$

Точная формула даёт то же до долей сантиметра (python: 11 313,708 и 11 313,713 м).

4. Как дальность зависит от высоты. Из $x = \sqrt{2Rh}$ дальность растёт как корень из высоты: чтобы увидеть вдвое дальше, подняться надо вчетверо выше. Для $h = 1$ м — 3,6 км, для $h = 100$ м — 35,8 км.



Дальность горизонта $x = \sqrt{2Rh}$ в зависимости от высоты глаза: кривая — по вычисленным точкам, точка — условие задачи.

Обратите внимание. Расстояние до горизонта много больше высоты: $x/h \approx 1100$. Поэтому на рисунках высоту приходится сильно преувеличивать — в настоящем масштабе луч AH почти горизонтален и почти лежит на поверхности. Преломление лучей в атмосфере мы не учитываем; оно чуть загибает лучи вдоль Земли и немного увеличивает дальность.

Проверка. Размерность: $\sqrt{\text{м}\cdot\text{м}} = \text{м}$. Предел: при $h \to 0$ получаем $x \to 0$ — глаз у самой воды видит только рядом. Второй способ: дуга

от точки под наблюдателем до горизонта стягивает угол $\varphi = \angle AOH$, и $\cos\varphi = \frac{R}{R+h} \approx 1 - \frac{h}{R}$. При малом угле $\cos\varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$, поэтому

$$\varphi \approx \sqrt{\frac{2h}{R}}, \qquad x \approx R\varphi = \sqrt{2Rh}$$

— то же.

Ответ. $x = \sqrt{(R+h)^2 - R^2} \approx \sqrt{2Rh} \approx 11{,}3$ км.