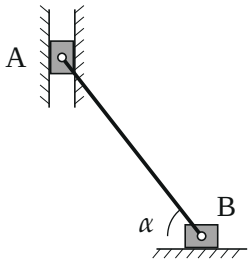
Два ползуна на стержне

Задача 6. [ИОШ 2023/24, отборочный этап, 10 класс, задача 6] Два ползуна A и B массой m и $2m$ соответственно (см. рисунок), связанные шарнирно прикреплённым к ним невесомым стержнем, могут двигаться без трения по вертикальным и горизонтальным направляющим. Ползуны удерживают так, что угол между стержнем и горизонтом равен α, а потом отпускают. Найти их ускорения в момент начала движения. Ползуном называется точечное массивное тело, которое может двигаться по некоторой поверхности или в некоторых направляющих.

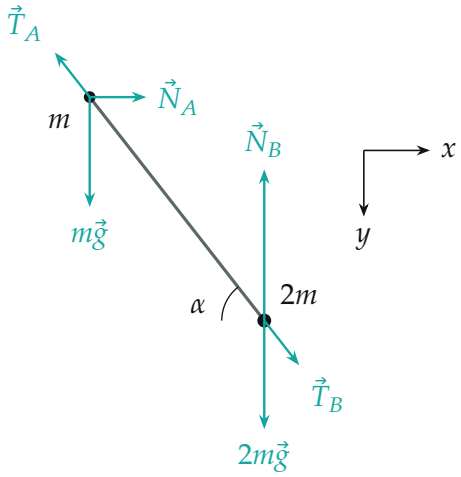


▲ **Решение. Что происходит.** Это задача о системе тел со связью: ползуны соединены жёстким стержнем, и их движения зависят друг от друга. Отпущенный ползун A падает вниз, стержень толкает B вправо. Схема стандартная: второй закон Ньютона для каждого ползуна + кинематическая связь от стержня. Важно, что ищем ускорения в самый первый момент, когда скорости ещё равны нулю, — тогда связь ускорений получается простой.

Обозначения. L — длина стержня, $\vec{a}_A$, $\vec{a}_B$ — ускорения ползунов, T — сила, с которой стержень действует на каждый ползун (вдоль стержня), N_A, N_B — силы реакции направляющих. Оси: x вправо, y вниз (туда ускоряется A).

1. Силы. Направляющие гладкие, поэтому их реакции перпендикулярны направляющим: $\vec{N}_A$ — горизонтально, $\vec{N}_B$ — вертикально. Стержень невесомый: если бы сила на его конце имела составляющую поперёк стержня, ничем не уравновешенный момент сил закрутил бы стержень без массы с бесконечным угловым ускорением. Значит, силы на

концах направлены вдоль стержня, равны по модулю (T) и противоположны. Стержень сжат: на А он давит вверх-влево по стержню, на В — вниз-вправо. Горизонтальную составляющую силы стержня на А уравновешивает реакция $\vec{N}_A$ (вправо), а на В вертикальную вместе с тяжестью — реакция $\vec{N}_B$ (вверх).



Силы на ползуны: тяжести, реакции гладких направляющих (перпендикулярно им) и силы стержня вдоль него; оси x — вправо, y — вниз.

2. Второй закон Ньютона для ползуна А в векторном виде $m\vec{a}_A = m\vec{g} + \vec{N}_A + \vec{T}_A$; ползун движется только по вертикали, поэтому нужна проекция на ось y (в ней нет неизвестной N_A):

$$ma_A = mg - T\sin\alpha.$$

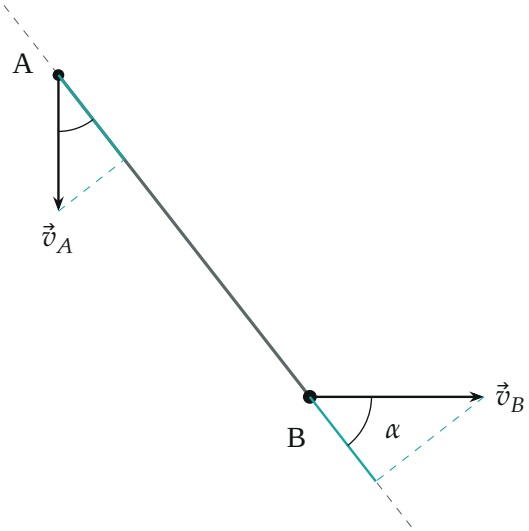
3. Второй закон Ньютона для ползуна В: $2m\vec{a}_B = 2m\vec{g} + \vec{N}_B + \vec{T}_B$, в проекции на ось x (нет N_B и силы тяжести):

$$2ma_B = T\cos\alpha.$$

4. Связь скоростей. Стержень нерастяжим, поэтому проекции скоростей его концов на направление стержня одинаковы (иначе концы сближались бы или расходились). Скорость А направлена вниз, В — вправо,

обе образуют со стержнем углы, показанные на рисунке:

$$v_A \sin\alpha = v_B \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad v_B = v_A \operatorname{tg}\alpha.$$



Проекции скоростей концов на стержень (бирюзовые отрезки) равны. Угол между $\vec{v}_A$ и стержнем (дуга у A) равен $90^\circ - \alpha$, поэтому $v_A \cos(90^\circ - \alpha) = v_B \cos\alpha$.

5. Связь ускорений в первый момент. Соотношение $v_B = v_A \operatorname{tg}\alpha$ верно в любой момент, но угол α при движении меняется. Продифференцируем по времени: $a_B = a_A \operatorname{tg}\alpha + v_A \frac{d(\operatorname{tg}\alpha)}{dt}$. Второе слагаемое пропорционально v_A, а в момент отпускания $v_A = 0$. Поэтому в начальный момент

$$a_B = a_A \operatorname{tg}\alpha.$$

Это и есть недостающее третье уравнение: неизвестных три (a_A, a_B, T), уравнений три.

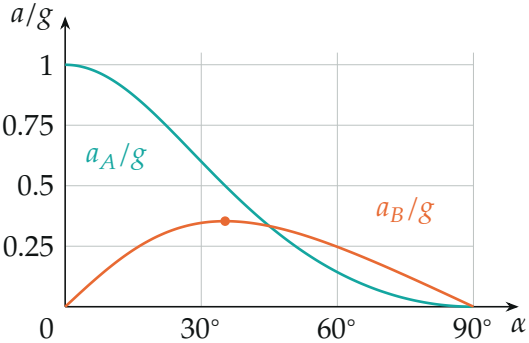
6. Решаем систему. Из пункта 3 и пункта 5 $T = \dfrac{2ma_B}{\cos\alpha} = \dfrac{2ma_A \sin\alpha}{\cos^2\alpha}$. Подставим в пункт 2:

$$ma_A = mg - 2ma_A \operatorname{tg}^2\alpha \quad \Rightarrow \quad a_A = \frac{g}{1 + 2\operatorname{tg}^2\alpha},$$

$$a_A = \frac{g\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha} = \frac{g\cos^2\alpha}{1+\sin^2\alpha},$$

$$a_B = a_A \operatorname{tg}\alpha = \frac{g\sin\alpha\cos\alpha}{1+\sin^2\alpha}.$$

Сила стержня $T = \dfrac{2mg\sin\alpha}{1+\sin^2\alpha} > 0$ — стержень действительно сжат, как мы и предполагали. Ползун A ускоряется вниз, B — вправо.



Начальные ускорения в зависимости от угла α (по вычисленным точкам). Ускорение B максимально, $\frac{g}{2\sqrt{2}} \approx 0{,}35g$, при $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ($\alpha \approx 35°$).

Обратите внимание. Связь $a_B = a_A \operatorname{tg}\alpha$ верна только в момент старта, пока скорости равны нулю. Позже к ней добавляются слагаемые со скоростями (центростремительное ускорение во вращении стержня), и пользоваться ею уже нельзя.

Проверка. Размерность: $[a] = [g]$. Пределы: $\alpha \to 90°$ (стержень вертикален) — $a_A \to 0$, $a_B \to 0$: стержень стоит на B и держит A, система в равновесии; $\alpha \to 0$ (стержень горизонтален) — $a_A \to g$, $a_B \to 0$: стержень горизонтален и вертикальной силы на A дать не может, A падает свободно. Второй способ — через энергию: при повороте стержня $E = \frac{1}{2}m\dot{y}_A^2 + \frac{1}{2}\cdot 2m\dot{x}_B^2 - mgy_A$; численное интегрирование уравнения движения при $\alpha = 60°$ (python) даёт $a_A = 0{,}1429g$, $a_B = 0{,}2474g$ — то же, что формулы.

Ответ. $a_A = \dfrac{g\cos^2\alpha}{1+\sin^2\alpha}$ (вниз), $a_B = \dfrac{g\sin\alpha\cos\alpha}{1+\sin^2\alpha}$ (вправо).