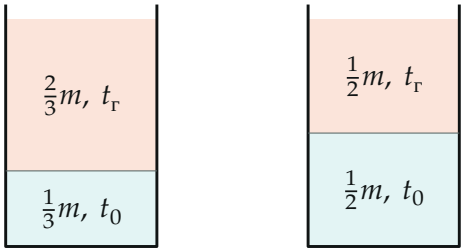
Два калориметра

Задача 1. [ИОШ 2023/24, отборочный этап, 11 класс, задача 1] Имеется два одинаковых теплоизолированных калориметра, частично заполненных водой комнатной температуры. Один калориметр заполнен водой на одну треть своего объёма, второй — наполовину. В калориметры до краёв наливают горячую воду, и через некоторое время в них устанавливаются следующие температуры: $t_1 = 67\,^\circ\mathrm{C}$ в первом и $t_2 = 56\,^\circ\mathrm{C}$ — во втором. Найти комнатную температуру и температуру горячей воды. Теплоёмкостью калориметра и потерями тепла пренебречь.



1: итог t_1 2: итог t_2

Поясняющий рисунок. Внизу — вода комнатной температуры t_0, сверху — долитая горячая вода $t_г$; m — масса воды в полном калориметре.

▲ **Решение. Что происходит.** В каждом калориметре холодная вода нагревается, горячая остывает, пока температуры не сравняются. Теплоизоляция и нулевая теплоёмкость калориметра означают, что вся теплота, отданная горячей водой, получена холодной: это уравнение теплового баланса. Два калориметра дают два уравнения на две неизвестные t_0 и $t_г$. Класс задачи — смешивание порций одного вещества: удельная теплоёмкость сократится, останутся только доли масс.

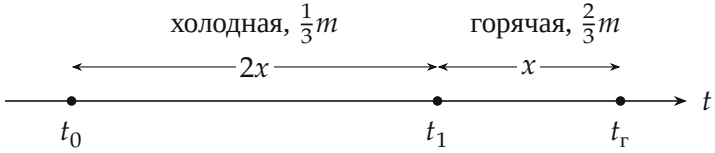
Обозначения. m — масса воды в полном калориметре (калориметры одинаковые, плотность воды одна); c — удельная теплоёмкость воды; t_0 — комнатная температура; $t_г$ — температура горячей воды.

1. Массы порций. В первом калориметре холодной воды $\frac{1}{3}$ объёма, значит, её масса $\frac{1}{3}m$; горячая вода заполняет оставшиеся $\frac{2}{3}$ объёма, её масса $\frac{2}{3}m$. Во втором — по $\frac{1}{2}m$ холодной и горячей.

2. Тепловой баланс для первого калориметра. Холодная вода нагревается от t_0 до t_1 и получает $c \cdot \frac{m}{3}(t_1 - t_0)$; горячая остывает от $t_г$ до t_1 и отдаёт $c \cdot \frac{2m}{3}(t_г - t_1)$. Потерь нет, поэтому

$$c\frac{m}{3}(t_1 - t_0) = c\frac{2m}{3}(t_г - t_1) \quad \Rightarrow \quad t_1 - t_0 = 2(t_г - t_1).$$

Смысл: итоговая температура делит отрезок от t_0 до $t_г$ в отношении $2:1$ — она ближе к горячей, потому что горячей воды вдвое больше.

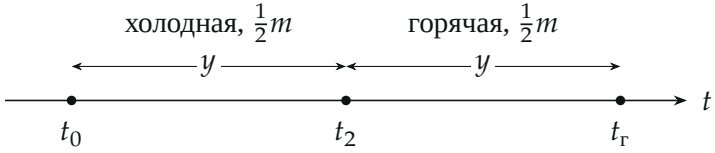


Первый калориметр: сдвиг температуры холодной воды вдвое больше, чем горячей, потому что её масса вдвое меньше (точки — по найденным значениям).

3. Тепловой баланс для второго калориметра. Массы равны, поэтому

$$c\frac{m}{2}(t_2 - t_0) = c\frac{m}{2}(t_г - t_2) \quad \Rightarrow \quad t_2 - t_0 = t_г - t_2.$$

Итоговая температура — ровно посередине между t_0 и $t_г$.



Второй калориметр: массы равны, сдвиги температур равны.

4. Решаем систему. Из пункта 3 выразим $t_г = 2t_2 - t_0$ и подставим в уравнение пункта 2:

$$t_1 - t_0 = 2(2t_2 - t_0 - t_1) \quad \Rightarrow \quad t_0 = 4t_2 - 3t_1.$$

Тогда

$$t_г = 2t_2 - t_0 = 3t_1 - 2t_2.$$

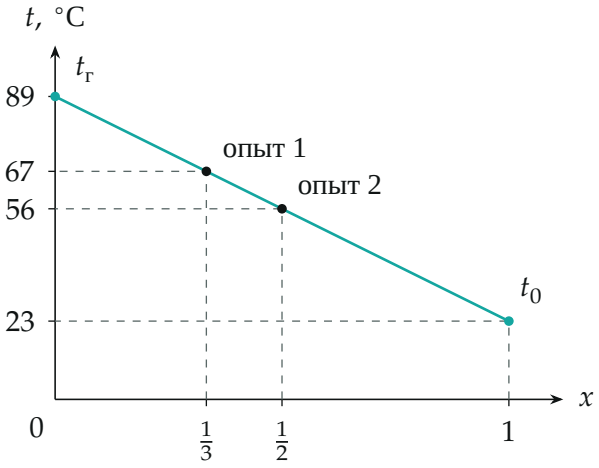
Числа:

$$t_0 = 4 \cdot 56 - 3 \cdot 67 = 23\,^\circ\text{C}, \qquad t_г = 3 \cdot 67 - 2 \cdot 56 = 89\,^\circ\text{C}.$$

5. Второй способ — график. Пусть доля холодной воды в калориметре равна x. Тепловой баланс $c\,xm\,(t - t_0) = c\,(1 - x)m\,(t_г - t)$ даёт

$$t = t_г - (t_г - t_0)\,x,$$

то есть итоговая температура линейно падает с долей холодной воды. Два опыта — две точки этой прямой: $(\frac{1}{3};\,67)$ и $(\frac{1}{2};\,56)$. Наклон: $\dfrac{67 - 56}{1/2 - 1/3} = 66\,^\circ\text{C}$ на единицу доли. Продолжим прямую до $x = 0$ (одна горячая вода): $t_г = 67 + 66 \cdot \frac{1}{3} = 89\,^\circ\text{C}$; до $x = 1$ (одна холодная): $t_0 = 89 - 66 = 23\,^\circ\text{C}$ — то же.



Итоговая температура как функция доли холодной воды x: прямая через две точки опытов; её концы при $x = 0$ и $x = 1$ — температуры горячей и холодной воды.

Обратите внимание. Горячую воду доливают *до краёв*, поэтому её масса — не m, а дополнение до полного калориметра: $\frac{2}{3}m$ и $\frac{1}{2}m$. Если взять одинаковые массы горячей воды в обоих опытах, система получится другой и ответ неверным.

Проверка. Размерность: обе формулы — линейные комбинации температур с суммой коэффициентов $4 - 3 = 1$ и $3 - 2 = 1$, это снова температура. Подстановка: $\frac{1}{3}(67 - 23) = \frac{44}{3}$ и $\frac{2}{3}(89 - 67) = \frac{44}{3}$ — первый баланс выполнен; $56 - 23 = 33 = 89 - 56$ — второй тоже. Порядок $t_0 < t_2 < t_1 < t_г$ разумен: где горячей воды больше, там теплее. Физический смысл: итоговая температура — среднее температур, взвешенное массами порций.

Ответ. $t_0 = 4t_2 - 3t_1 = 23\,^\circ\text{C}$ (комнатная), $t_г = 3t_1 - 2t_2 = 89\,^\circ\text{C}$ (горячая вода).