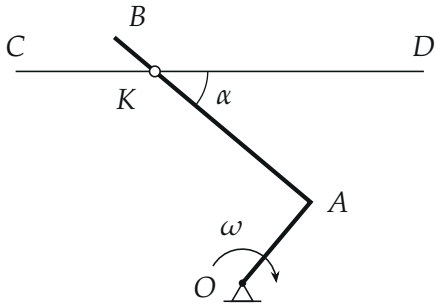
Колечко на изогнутом стержне

Задача 3. [ИОШ 2023/24, отборочный этап, 11 класс, задача 3] Изогнутый под прямым углом жёсткий стержень OAB вращается с угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси O. Длина колена OA стержня равна l, колено AB стержня очень длинное. Стержень проходит через маленькое колечко K, которое может скользить по прямой CD, находящейся на расстоянии $2l$ от оси O (см. рисунок). Найти скорость колечка в момент времени, когда угол AKD равен α.



▲ **Решение. Что происходит.** Колечко — точка пересечения двух линий: неподвижной прямой CD и поворачивающегося колена AB. Класс задачи — кинематика связей: колечко одновременно скользит по стержню и по прямой. Главная идея: колечко может свободно скользить вдоль стержня, но поперёк стержня оно обязано двигаться вместе с той точкой стержня, где сейчас находится. Значит, проекции на нормаль к стержню у скорости колечка и у скорости этой точки стержня равны.

Обозначения. $\vec{v}$ — скорость колечка (вдоль CD); $\vec{u}$ — скорость точки стержня, совпадающей сейчас с K; $\vec{n}$ — единичный вектор нормали к колену AB; AK — расстояние по стержню от A до колечка.

1. Скорость точки стержня под колечком. Стержень вращается как целое вокруг O, поэтому каждая его точка движется по окружности: $u = \omega \cdot OK$, $\vec{u} \perp OK$. Нам нужна только проекция $\vec{u}$ на нормаль $\vec{n}$ к колену AB. Разложим $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AK}$. Слагаемое $\overrightarrow{OA}$ направлено *вдоль* нормали (колено OA перпендикулярно AB), и его вклад в скорость $\omega \cdot OA$

направлен вдоль стержня — поперёк стержня он ничего не даёт. Слагаемое $\overrightarrow{AK}$ лежит вдоль стержня и даёт скорость $\omega \cdot AK$ строго по нормали. Поэтому

$$u_n = \omega \cdot AK.$$

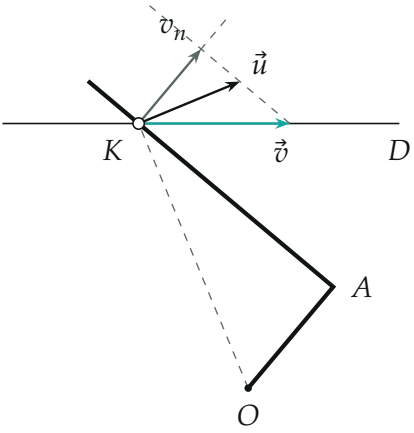
2. Условие связи для колечка. Колечко и точка стержня под ним не могут разойтись поперёк стержня (иначе колечко слетело бы со стержня), поэтому

$$v_n = u_n.$$

Скорость колечка направлена вдоль CD и составляет со стержнем угол α, значит, её проекция на нормаль к стержню $v_n = v \sin\alpha$. Получаем

$$v \sin\alpha = \omega \cdot AK \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\omega \cdot AK}{\sin\alpha}.$$

Вдоль стержня скорости колечка и точки стержня различны — это и есть скольжение колечка по стержню.

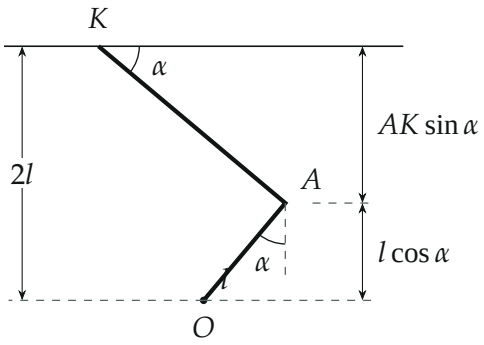


Скорость колечка $\vec{v}$ (вдоль CD) и скорость $\vec{u} \perp OK$ точки стержня под колечком. Их концы лежат на одной прямой, параллельной стержню: проекции на нормаль к стержню одинаковы и равны $v_n = \omega \cdot AK$.

3. Длина AK. Спроецируем ломаную $O \to A \to K$ на перпендикуляр к CD (вертикаль). Колено AK наклонено к CD под углом α, его вертикальная проекция $AK \sin\alpha$. Колено OA перпендикулярно AK, поэтому с

вертикалью оно составляет тот же угол α, и его проекция $l\cos\alpha$. Сумма проекций — расстояние от O до CD:

$$l\cos\alpha + AK\sin\alpha = 2l \quad \Rightarrow \quad AK = \frac{l\,(2-\cos\alpha)}{\sin\alpha}.$$



Проекции колен на вертикаль: $l\cos\alpha + AK\sin\alpha = 2l$. Угол между OA и вертикалью равен α (как угол между AK и CD: стороны углов взаимно перпендикулярны).

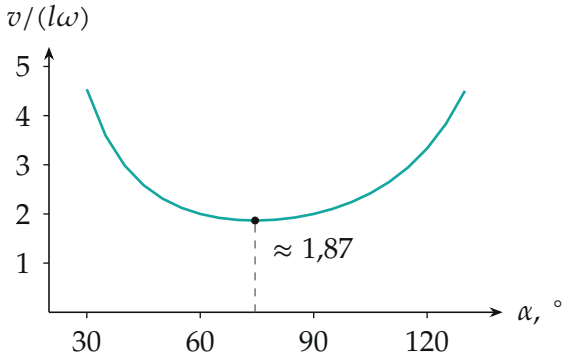
4. Ответ. Подставим AK в формулу пункта 2:

$$v = \frac{\omega}{\sin\alpha}\cdot\frac{l\,(2-\cos\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{(2-\cos\alpha)\,l\omega}{\sin^2\alpha}.$$

5. Второй способ — через координату. Пусть колено OA составляет с вертикалью угол α (тот же, что в пункте 3), $\dot\alpha = \pm\omega$. Координата колечка вдоль CD, отсчитанная от проекции точки O: $x = l\sin\alpha - AK\cos\alpha = l\sin\alpha - \dfrac{l(2-\cos\alpha)\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Дифференцируя по α и приводя к общему знаменателю $\sin^2\alpha$ (числитель упрощается через $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$), получаем

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{l\,(2-\cos\alpha)}{\sin^2\alpha},$$

и $v = \omega\left|\dfrac{dx}{d\alpha}\right|$ — то же (проверено численным дифференцированием на python при нескольких α).



Скорость колечка в единицах $l\omega$ в зависимости от α (точки посчитаны по ответу). При $\alpha \to 0$ и $\alpha \to 180°$ стержень ложится вдоль CD и колечко «убегает» бесконечно быстро; минимум $\approx 1{,}87\, l\omega$ при $\cos\alpha = 2 - \sqrt{3}$.

Обратите внимание. Точка A тоже движется, но её скорость ωl направлена вдоль колена AB — сдвиг стержня вдоль самого себя не сдвигает точку пересечения с CD. Поэтому движение точки A на скорость колечка не влияет, и это не приближение, а точный результат.

Проверка. Размерность: $[l\omega] =$ м/с. Частный случай $\alpha = 90°$: колено AB вертикально, OA горизонтально, $AK = 2l$, скорость точки стержня под колечком поперёк стержня $\omega \cdot AK = 2l\omega$ и направлена вдоль CD, ответ даёт $v = 2l\omega$ — совпадает. При $\alpha \to 0$ $v \to \infty$: почти параллельные прямые пересекаются далеко, и малый поворот сильно сдвигает точку пересечения.

Ответ. $v = \dfrac{(2 - \cos\alpha)\, l\omega}{\sin^2\alpha}$.