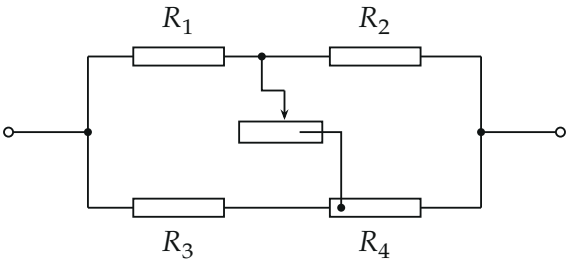
Цепь с реостатом

Задача 4. [ИОШ 2023/24, отборочный этап, 11 класс, задача 4] Электрическая цепь содержит три резистора с известными сопротивлениями $R_1 = 40$ Ом, $R_2 = 60$ Ом, $R_3 = 50$ Ом, неизвестного сопротивления R_4 и реостата, соединённых так, как это показано на схеме на рисунке. При измерении сопротивления цепи выяснилось, что оно не зависит от положения ползунка реостата. Найти сопротивление R_4 и сопротивление всей цепи.



▲ **Решение. Что происходит.** Реостат соединяет середину верхней ветви (между R_1 и R_2) с серединой нижней (между R_3 и R_4) — это мост. Положение ползунка меняет сопротивление этого «мостика». Сопротивление всей цепи не зависит от сопротивления мостика только тогда, когда ток через мостик не идёт ни при каком его сопротивлении, то есть когда потенциалы точек, которые он соединяет, равны. Класс задачи — уравновешенный мост: условие равновесия $R_1R_4 = R_2R_3$, после чего мостик можно выбросить.

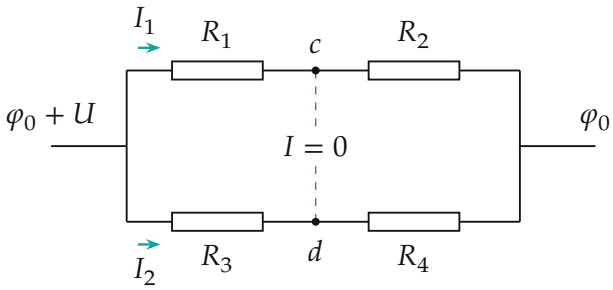
Обозначения. U — напряжение на цепи; I_1 — ток верхней ветви, I_2 — нижней; c и d — точки подключения реостата (на верхней и нижней ветви); φ_c, φ_d — их потенциалы; R — сопротивление цепи.

1. Почему ток через реостат равен нулю. Пусть $\varphi_c \neq \varphi_d$. Тогда через реостат идёт ток $(\varphi_c - \varphi_d)/x$, где x — сопротивление включённой части реостата; меняя x ползунком, мы меняем этот ток и токи всех ветвей, а с ними и сопротивление цепи. По условию сопротивление не меняется, значит, ток через реостат равен нулю при любом x и

$$\varphi_c = \varphi_d.$$

2. Токи ветвей при закрытом мостике. Тока через реостат нет, поэтому через R_1 и R_2 идёт один ток I_1, а через R_3 и R_4 — один ток I_2. Каждая ветвь подключена к напряжению U, и по закону Ома для участка

$$I_1 = \frac{U}{R_1 + R_2}, \qquad I_2 = \frac{U}{R_3 + R_4}.$$



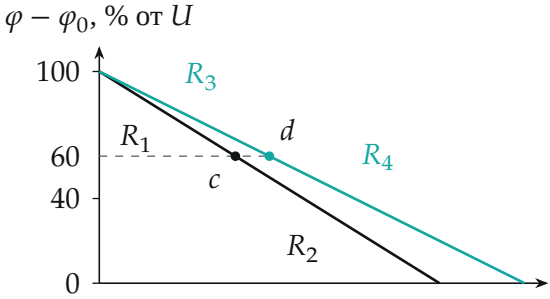
Мост уравновешен: потенциалы точек c и d равны, ток через реостат (пунктир) равен нулю, и ветви работают независимо.

3. Условие равновесия моста. Равенство $\varphi_c = \varphi_d$ означает равные падения напряжения на R_1 и на R_3 (обе ветви начинаются в одной точке):

$$I_1 R_1 = I_2 R_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{R_3}{R_3 + R_4} \quad \Rightarrow \quad R_1 R_4 = R_2 R_3.$$

Отсюда

$$R_4 = \frac{R_2 R_3}{R_1} = \frac{60 \cdot 50}{40} = 75 \text{ Ом}.$$



Потенциал вдоль ветвей (по горизонтали — сопротивление, пройденное от входа, клетка — 20 Ом): чёрная — верхняя ветвь, бирюзовая — нижняя. В точках c и d потенциал одинаков, 60 % от U: на R_1 и R_3 падает по 40 % напряжения.

4. Сопротивление цепи. Мостик тока не несёт, его можно убрать: остаются две параллельные ветви $R_1+R_2 = 100$ Ом и $R_3+R_4 = 125$ Ом. Для параллельного соединения

$$R = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \frac{100 \cdot 125}{225} \approx 55{,}6 \text{ Ом}.$$

Подставив $R_4 = R_2R_3/R_1$, получим форму организаторов

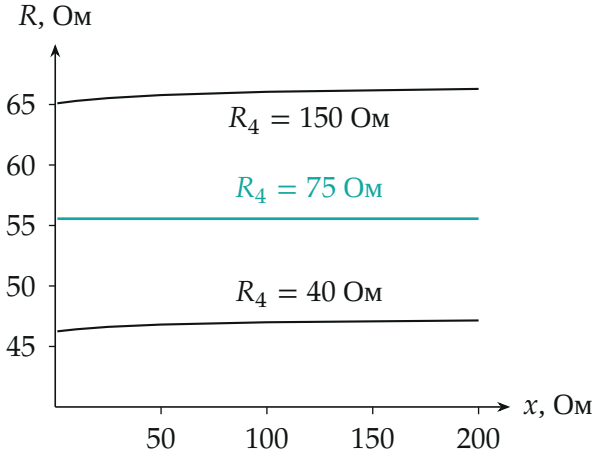
$$R = \frac{(R_1 + R_2)^2 R_3}{R_1^2 + R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

— то же число.

5. Второй способ — закоротим мостик. Раз $\varphi_c = \varphi_d$, точки c и d можно не только разъединить, но и соединить проводом. Тогда цепь — это $(R_1 \parallel R_3)$ последовательно с $(R_2 \parallel R_4)$:

$$R = \frac{40 \cdot 50}{90} + \frac{60 \cdot 75}{135} = 22{,}2 + 33{,}3 = 55{,}6 \text{ Ом}$$

— совпадает. Численный расчёт по правилам Кирхгофа при разных сопротивлениях реостата подтверждает это: при $R_4 = 75$ Ом сопротивление цепи всегда 55,6 Ом, а при другом R_4 оно меняется с положением ползунка.



Сопротивление цепи в зависимости от сопротивления x включённой части реостата (расчёт по правилам Кирхгофа). Горизонтальная линия — только у уравновешенного моста $R_4 = 75$ Ом.

Обратите внимание. Не нужно знать ни сопротивление реостата, ни где стоит ползунок: условие «не зависит от положения» само говорит, что ток через реостат равен нулю. Попытка честно учесть реостат приводит к громоздкому расчёту моста, который здесь не нужен.

Проверка. Размерность: R_2R_3/R_1 — Ом. Два способа (разомкнуть и закоротить мостик) дали одно $R = 55{,}6$ Ом. Оценка: R меньше меньшей из ветвей (100 Ом), как и должно быть при параллельном соединении.

Ответ. $R_4 = \dfrac{R_2R_3}{R_1} = 75$ Ом; $R = \dfrac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \approx 55{,}6$ Ом.