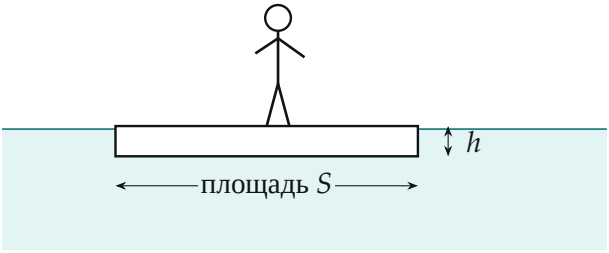
Рыбак на льдине

Задача 1. [ИОШ 2023/24, отборочный этап, 9 класс, задача 1] Рыбак массой $m = 75$ кг выходит на весенний лёд толщиной $h = 40$ см, расположенный на границе льда и открытой воды. Внезапно под тяжестью рыбака от льда откалывается льдина. При какой минимальной площади льдина удержит рыбака над водой? Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3, плотность льда $\rho_0 = 900$ кг/м^3.

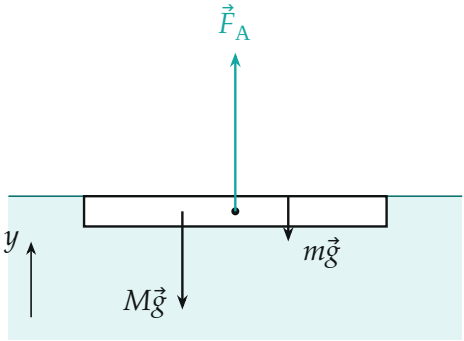


Поясняющий рисунок. Предельный случай: льдина с рыбаком погружена целиком, её верх — вровень с водой.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на условие плавания. Чем меньше льдина, тем глубже она садится под весом рыбака. Наименьшая льдина, которая ещё держит рыбака над водой, — та, что погружается в воду целиком, до верхней поверхности: тогда сила Архимеда наибольшая из возможных и как раз уравновешивает вес льдины и рыбака. Меньшая льдина уйдёт под воду вместе с рыбаком.

Обозначения. S — площадь льдины; $V = Sh$ — её объём; $M = \rho_0 V$ — её масса; F_A — сила Архимеда. Ось y — вверх.

1. Силы на льдину. Сила тяжести $M\vec{g}$ (вниз), сила давления рыбака $m\vec{g}$ (вниз; рыбак в покое, давит своим весом), сила Архимеда $\vec{F}_\text{A}$ (вверх). При полном погружении льдины по закону Архимеда $F_\text{A} = \rho g V$ (рыбак в воде не находится).



Силы на льдину в предельном случае: Архимед вверх, собственный вес и вес рыбака вниз. Длины стрелок по модулю: $F_A = Mg + mg$, $Mg = 9\,mg$.

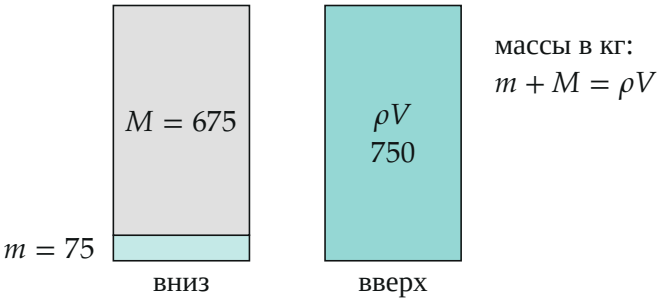
2. Условие равновесия. Первый закон Ньютона для льдины в проекции на ось y:

$$F_A - Mg - mg = 0 \quad \Longrightarrow \quad \rho g S h = \rho_0 g S h + mg.$$

3. Площадь. Сокращаем g и выражаем S:

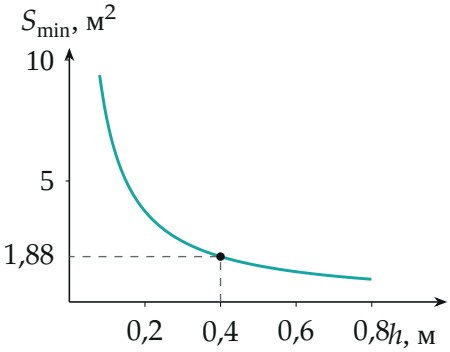
$$(\rho - \rho_0) S h = m, \qquad S = \frac{m}{(\rho - \rho_0)h} = \frac{75\ \text{кг}}{100\ \text{кг/м}^3 \cdot 0{,}4\ \text{м}} = 1{,}88\ \text{м}^2.$$

Смысл формулы: каждый кубометр льда, погружённый целиком, даёт «запас» подъёмной силы $(\rho - \rho_0)g$ — вес 100 кг. Рыбаку нужно 75 кг запаса, то есть 0,75 м^3 льда, при толщине 0,4 м это 1,88 м^2.



Баланс масс при $S = 1{,}88$ м^2: льдина 0,75 м^3 весит как 675 кг, вытесняет воду массой 750 кг; разница 75 кг — рыбак.

Обратите внимание. Льдина тяжелее рыбака в девять раз, но держит его именно разница плотностей: на подъём рыбака работает лишь $\rho - \rho_0 = 100$ кг/м^3 из 1000. Если забыть вес самой льдины и написать $\rho S h = m$, получится в 10 раз меньшая площадь 0,19 м^2.



Наименьшая площадь льдины в зависимости от толщины льда при $m = 75$ кг: $S = 0{,}75\ м^3/h$. Тонкий весенний лёд требует большой льдины.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{кг}}{\text{кг/м}^3 \cdot \text{м}} = \text{м}^2$. Пределы: при $\rho_0 \to \rho$ лёд «ничего не держит», $S \to \infty$; чем толще лёд, тем меньше нужна площадь, $S \propto 1/h$.

Ответ. $S = \dfrac{m}{(\rho - \rho_0)h} \approx 1{,}88$ м^2.