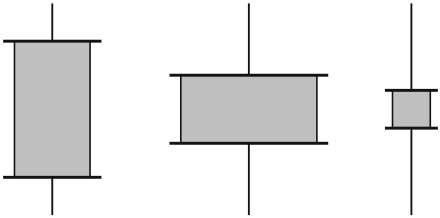
Фольга между электродами

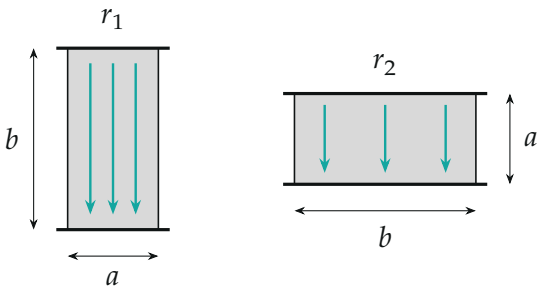
Задача 2. [ИОШ 2023/24, отборочный этап, 9 класс, задача 2] Если тонкую металлическую фольгу в форме прямоугольника включить между двумя длинными электродами короткой стороной к электродам (левый рисунок), её сопротивление будет равно r_1. Если ту же фольгу включить между электродами длинной стороной к электродам (средний рисунок), её сопротивление будет равно r_2. Каким будет сопротивление такой же фольги в форме квадрата со стороной, вдвое меньшей короткой стороны прямоугольника, включённой в цепь так, как это показано на правом рисунке?



▲ **Решение. Что происходит.** Задача на сопротивление проводника. Ток идёт от электрода к электроду, поэтому длина проводника — сторона фольги вдоль тока, а сечение — другая сторона, умноженная на толщину. Неизвестных много: удельное сопротивление, толщина, обе стороны. Но произведение $r_1 r_2$ не зависит от сторон, а у квадрата длина и ширина равны и сокращаются — ответ выражается через r_1 и r_2.

Обозначения. ρ — удельное сопротивление металла; d — толщина фольги; a — короткая сторона прямоугольника, b — длинная; $x = a/2$ — сторона квадрата; r — искомое сопротивление.

1. Формула сопротивления. Сопротивление однородного проводника постоянного сечения $R = \rho\dfrac{L}{S}$, где L — длина вдоль тока, S — площадь поперечного сечения. Фольга тонкая, электроды длинные и касаются её по всей стороне, поэтому ток течёт равномерно и параллельно, и формула применима.



Ток (бирюзовые стрелки) течёт от электрода к электроду. Слева длина вдоль тока b, ширина a; справа — наоборот. Толщина фольги d одна и та же.

2. Два включения прямоугольника. Слева ток идёт вдоль длинной стороны: длина b, сечение ad. Справа — вдоль короткой: длина a, сечение bd:

$$r_1 = \frac{\rho b}{ad}, \qquad r_2 = \frac{\rho a}{bd}.$$

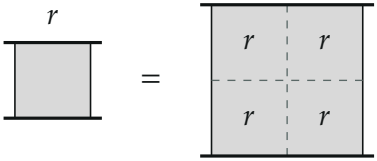
3. Исключаем стороны. Перемножим равенства — a и b сокращаются:

$$r_1 r_2 = \frac{\rho^2}{d^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\rho}{d} = \sqrt{r_1 r_2}.$$

4. Квадрат. Длина вдоль тока x, сечение xd:

$$r = \frac{\rho x}{xd} = \frac{\rho}{d} = \sqrt{r_1 r_2}.$$

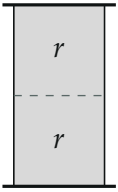
Сторона квадрата сократилась: «вдвое меньше короткой стороны» в ответ не входит.



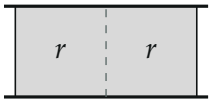
два по r последовательно: $2r$;
два таких ряда параллельно: r

Второй способ увидеть, что размер квадрата не важен: квадрат вдвое больше режется на четыре квадрата исходного размера. В каждом столбце два квадрата последовательно ($2r$), два столбца параллельно — снова r.

Обратите внимание. Не важно, какой стороной квадрат прижат к электродам и какого он размера: сопротивление «квадрата» фольги одно и то же. Поэтому сопротивление тонких плёнок задают в «омах на квадрат». Ловушка — подставить $x = a/2$ и пытаться найти a: из данных это невозможно и не нужно.



$b = 2a$:
$r_1 = 2r$



$r_2 = \frac{r}{2}$

Пример: прямоугольник $a \times 2a$ — это два квадрата. Слева они последовательно ($r_1 = 2r$), справа параллельно ($r_2 = r/2$); $\sqrt{r_1 r_2} = \sqrt{2r \cdot r/2} = r$.

Проверка. Размерность: $\sqrt{\text{Ом} \cdot \text{Ом}} = \text{Ом}$. Для квадратной «прямоугольной» фольги ($a = b$) должно быть $r_1 = r_2 = r$ — формула даёт $\sqrt{r \cdot r} = r$. Пример на рисунке выше — тоже сходится.

Ответ. $r = \sqrt{r_1 r_2}$ (от размера квадрата не зависит).