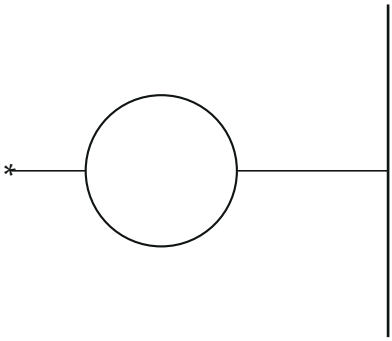
Тень шара на экране

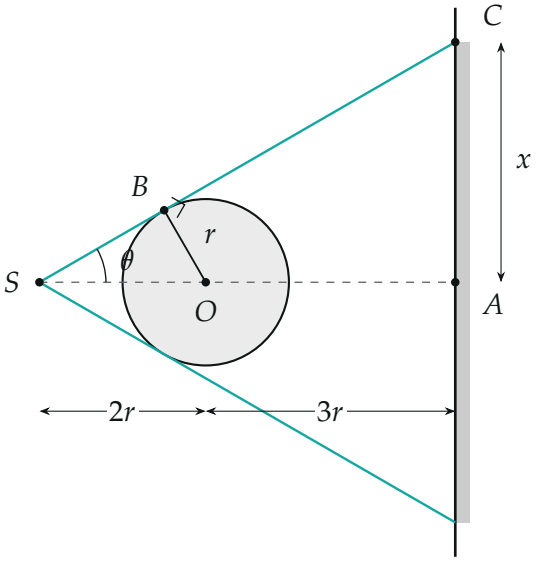
Задача 3. [ИОШ 2023/24, отборочный этап, 9 класс, задача 3] Центр непрозрачного шара радиуса r расположен на расстоянии $3r$ от экрана. На расстоянии $5r$ от экрана на перпендикуляре, проходящем через центр шара, расположен точечный источник света (см. рисунок). Найти размер геометрической тени предмета на экране.



▲ **Решение. Что происходит.** Задача геометрической оптики: свет идёт прямолинейно. Тень на экране — круг (всё симметрично относительно прямой источник–центр), а её граница — след лучей, которые только касаются шара. Луч, касательный к шару, перпендикулярен радиусу в точке касания, и угол раствора конуса тени находится из прямоугольного треугольника; дальше — подобие.

Обозначения. S — источник; O — центр шара; B — точка касания луча; A — основание перпендикуляра на экране; C — край тени; $x = AC$ — радиус тени; θ — угол между касательным лучом и осью SA.

1. Расстояния. Источник на $5r$ от экрана, центр шара — на $3r$, на одном перпендикуляре, поэтому $SO = 5r - 3r = 2r$, $SA = 5r$.



Касательные к шару лучи (бирюзовые) ограничивают конус тени. Радиус OB перпендикулярен лучу SB; тень на экране — круг радиуса $x = AC$ (серая полоса — её сечение).

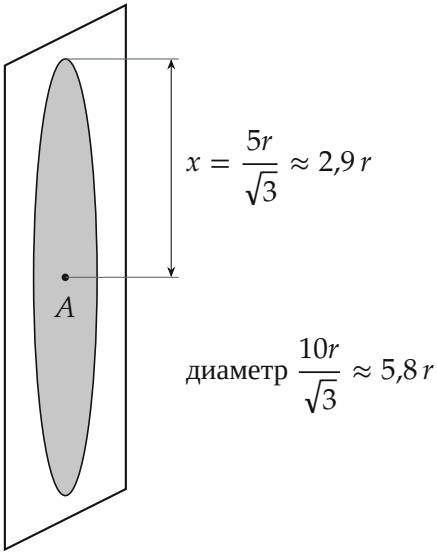
2. Угол конуса тени. Касательная перпендикулярна радиусу в точке касания, поэтому треугольник SBO прямоугольный с прямым углом при B:

$$\sin\theta = \frac{OB}{SO} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}, \qquad \theta = 30^\circ.$$

3. Радиус тени. Треугольник SAC прямоугольный (экран перпендикулярен оси), угол при S тот же θ:

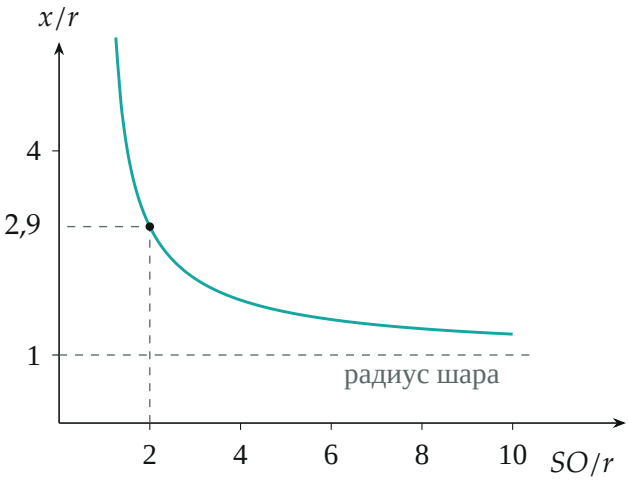
$$x = SA\tan\theta = 5r\cdot\tan 30^\circ = \frac{5r}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{25}{3}}\,r \approx 2{,}9\,r.$$

Второй способ — подобие, как у организаторов. Треугольники SBO и SAC подобны (прямоугольные с общим углом θ): $\dfrac{OB}{OS} = \dfrac{AC}{SC}$, где $SC = \sqrt{25r^2 + x^2}$. Получаем $\dfrac{r}{2r} = \dfrac{x}{\sqrt{25r^2 + x^2}}$, откуда $4x^2 = 25r^2 + x^2$, $x^2 = \dfrac{25}{3}r^2$ — то же.



Тень на экране — круг с центром A на оси, радиус $\approx 2{,}9\,r$, диаметр $\approx 5{,}8\,r$: почти втрое больше самого шара.

Обратите внимание. Край тени даёт касательный луч, а не луч в «верхнюю точку» шара на вертикали над центром: такой луч прошёл бы через $(2r;\, r)$ и дал бы $x = \frac{5}{2}r$ — меньше верного. Точка касания B лежит ближе к источнику, чем центр шара.



Радиус тени при шаре на $3r$ от экрана в зависимости от расстояния источник–центр, $x = r(SO + 3r)/\sqrt{SO^2 - r^2}$. Отмечена точка задачи $SO = 2r$. Далёкий источник даёт тень, близкую к размеру шара.

Проверка. Размерность: x пропорционален r. Предел: источник очень далеко — лучи почти параллельны, тень стремится к радиусу шара r (график выше). Источник близко к шару — тень растёт без предела. Ответ $2{,}9\,r$ между r и бесконечностью и больше $2{,}5\,r$ из «ошибочного» луча — согласуется.

Ответ. Тень — круг радиуса $x = \dfrac{5r}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{25}{3}}\,r \approx 2{,}9\,r$ (диаметр $\approx 5{,}8\,r$).