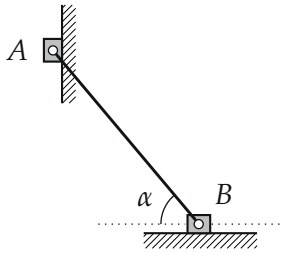
Два ползуна на стержне

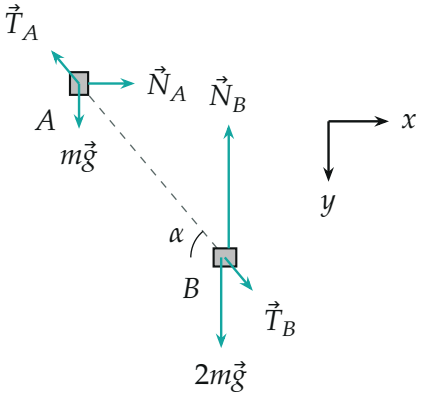
Задача 6. [ИОШ 2023/24, отборочный этап, 9 класс, задача 6] Два ползуна A и B массой m и $2m$ соответственно (см. рисунок), связанные шарнирно прикреплённым к ним невесомым стержнем, могут двигаться без трения по вертикальным и горизонтальным направляющим. Ползуны удерживают так, что угол между стержнем и горизонтом равен α, а потом отпускают. Найти их ускорения в момент начала движения. Ползуном называется точечное массивное тело, которое может двигаться по некоторой поверхности или в некоторых направляющих.



▲ **Решение. Что происходит.** Ползуны отпустили из покоя: A начинает падать вниз по вертикальной направляющей, а стержень толкает B вправо по горизонтальной. Класс задачи — связанные тела: два вторых закона Ньютона плюс кинематическая связь, которую даёт нерастяжимый стержень. Главная идея: в момент старта скорости равны нулю, поэтому связь скоростей переходит в такую же связь ускорений.

Обозначения. Ось y — вертикально вниз (вдоль движения A), ось x — горизонтально вправо (вдоль движения B); a_A, a_B — модули ускорений; T — сила, с которой стержень действует на каждый ползун (стержень сжат); N_A, N_B — силы реакции направляющих.

1. Силы. На ползун A действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции $\vec{N}_A$ вертикальной направляющей (горизонтально, перпендикулярно направляющей: трения нет) и сила стержня $\vec{T}_A$. Стержень невесом, поэтому сила со стороны стержня направлена вдоль него: иначе на невесомый стержень действовал бы ненулевой момент сил. На ползун B: $2m\vec{g}$, $\vec{N}_B$ вертикально и $\vec{T}_B$ вдоль стержня. По той же причине $|\vec{T}_A| = |\vec{T}_B| = T$.



Силы на ползуны при $\alpha = 50°$ (длины — по найденным значениям: $T \approx 0{,}97\,mg$, $N_A \approx 0{,}62\,mg$, $N_B \approx 2{,}74\,mg$). Стержень сжат: он толкает A вверх-влево, B — вниз-вправо.

2. Второй закон Ньютона. Векторно:

$$m\vec{a}_A = m\vec{g} + \vec{N}_A + \vec{T}_A, \qquad 2m\vec{a}_B = 2m\vec{g} + \vec{N}_B + \vec{T}_B.$$

Для A нужна проекция на ось y (по ней A движется, и $\vec{N}_A$ в неё не входит); для B — на ось x (не входят $2m\vec{g}$ и $\vec{N}_B$). Сила $\vec{T}_A$ составляет с горизонталью угол α и направлена вверх, её проекция на y равна $-T\sin\alpha$; проекция $\vec{T}_B$ на x равна $T\cos\alpha$:

$$ma_A = mg - T\sin\alpha, \qquad 2ma_B = T\cos\alpha.$$

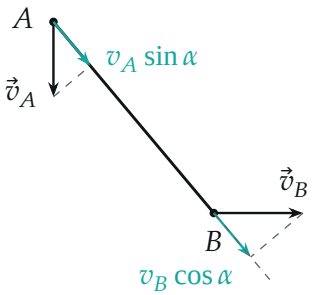
3. Связь ускорений. Стержень нерастяжим, поэтому проекции скоростей его концов на стержень равны. Скорость $\vec{v}_A$ вертикальна и составляет со стержнем угол $90° - \alpha$, её проекция $v_A\sin\alpha$; скорость $\vec{v}_B$ горизонтальна, проекция $v_B\cos\alpha$:

$$v_A\sin\alpha = v_B\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad v_B = v_A\operatorname{tg}\alpha.$$

Продифференцируем по времени: $a_B = a_A\operatorname{tg}\alpha + v_A\dfrac{\dot{\alpha}}{\cos^2\alpha}$. В момент

старта $v_A = 0$, второе слагаемое пропадает:

$$a_B = a_A \operatorname{tg}\alpha.$$



Нерастяжимость стержня: проекции скоростей концов на стержень (бирюзовые) равны. Длины посчитаны при $\alpha = 50°$.

4. Решаем систему. Из уравнения для B: $T = \dfrac{2ma_B}{\cos\alpha} = \dfrac{2ma_A \sin\alpha}{\cos^2\alpha}$. Подставим в уравнение для A:

$$a_A = g - 2a_A \operatorname{tg}^2\alpha \quad \Rightarrow \quad a_A = \frac{g}{1 + 2\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{g\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha} = \frac{g\cos^2\alpha}{1 + \sin^2\alpha},$$

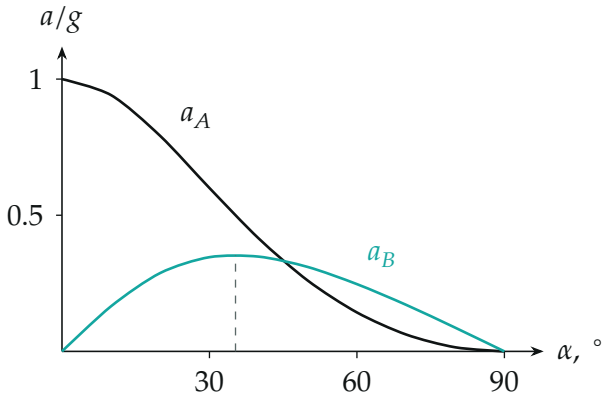
$$a_B = a_A \operatorname{tg}\alpha = \frac{g\sin\alpha\cos\alpha}{1 + \sin^2\alpha}.$$

A ускоряется вниз, B — вправо, от стены. Сила стержня $T = \dfrac{2mg\sin\alpha}{1 + \sin^2\alpha} > 0$ — стержень действительно сжат.

5. Второй способ — через энергию. Кинетическая энергия системы $K = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}\cdot 2mv_B^2 = \frac{1}{2}mv_A^2(1 + 2\operatorname{tg}^2\alpha)$. Работу совершает только сила тяжести ползуна A (реакции перпендикулярны скоростям, а стержень невесом и энергии не запасает), поэтому $dK/dt = mgv_A$. Продифференцируем K; при малых v_A (сразу после старта) слагаемое с $\dot{\alpha} \propto v_A$ даёт поправку порядка v_A^3, и

$$mv_A a_A(1 + 2\operatorname{tg}^2\alpha) = mgv_A \quad \Rightarrow \quad a_A = \frac{g}{1 + 2\operatorname{tg}^2\alpha}$$

— то же. Расчёт на python (уравнение движения для угла α, полученное из энергии) при $\alpha = 50°$ даёт $a_A = 0{,}260\,g$, $a_B = 0{,}310\,g$, как и формулы.



Ускорения ползунов в зависимости от α (точки посчитаны по ответу). Ускорение B максимально, $\approx 0{,}354\,g$, при $\operatorname{tg}\alpha = 1/\sqrt{2}$ ($\alpha \approx 35°$).

Обратите внимание. Связь $v_B = v_A \operatorname{tg}\alpha$ верна всегда, а $a_B = a_A \operatorname{tg}\alpha$ — только в момент старта, когда скорости ещё нулевые. Позже к ускорению B добавляется слагаемое, пропорциональное v_A^2 (стержень поворачивается).

Проверка. Размерность: $[a] = [g]$. Пределы: $\alpha \to 0$ (стержень горизонтален) — $a_A = g$, $a_B = 0$: стержень не мешает A падать, а горизонтально толкнуть B ему нечем в первый момент; $\alpha = 90°$ (стержень вертикален, A стоит на B) — $a_A = a_B = 0$, система в равновесии. Оба предела разумны.

Ответ. $a_A = \dfrac{g\cos^2\alpha}{1+\sin^2\alpha}$ (вниз), $a_B = \dfrac{g\sin\alpha\cos\alpha}{1+\sin^2\alpha}$ (горизонтально, от вертикальной направляющей).