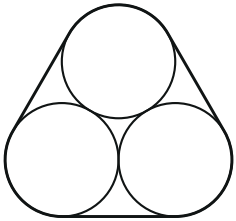
Резиновое кольцо на трёх цилиндрах

Задача 1. [ИОШ 2023/24, 10 класс, задача 1] Имеется упругое резиновое кольцо, коэффициент жёсткости которого равен k. Кольцо растянули и надели на три одинаковых цилиндра радиуса R (см. рис.; вид с торца цилиндров). Найти силы взаимодействия цилиндров, если длина недеформированного кольца — $7R$. Считать, что для любых удлинений кольца работает закон Гука.



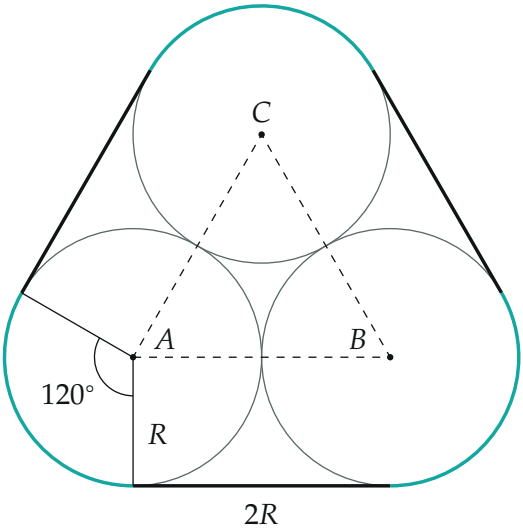
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равновесие тел под действием силы упругости. Кольцо одинаково натянуто по всей длине (трения нет, цилиндры одинаковые), и сила натяжения по закону Гука определяется удлинением. Удлинение найдём из геометрии: растянутое кольцо состоит из прямых участков между цилиндрами и дуг, охватывающих цилиндры. Затем запишем равновесие одного цилиндра: кольцо прижимает его к соседям, соседи отталкивают.

Обозначения. T — сила натяжения кольца; N — сила, с которой один цилиндр давит на соседний; L — длина надетого кольца; Δl — его удлинение; A, B, C — центры цилиндров (рис. 2).

1. Длина надетого кольца. Цилиндры касаются друг друга, поэтому центры образуют равносторонний треугольник со стороной $2R$. Прямой участок кольца касается двух соседних цилиндров и параллелен стороне треугольника, отстоя от неё на R; его длина равна стороне, $2R$. Таких участков три.

В каждой точке касания радиус перпендикулярен прямому участку. У цилиндра A оба радиуса в точки касания перпендикулярны сторонам AB и AC, которые образуют угол $60°$. Значит, угол между радиусами равен

$180° - 60° = 120°$: дуга, охватывающая цилиндр, — треть окружности. Три такие дуги вместе дают полную окружность длиной $2\pi R$.



Кольцо: три прямых участка длиной $2R$ (чёрные) и три дуги по $120°$ (бирюзовые). Пунктир — треугольник центров со стороной $2R$.

Длина надетого кольца

$$L = 3 \cdot 2R + 2\pi R = (6 + 2\pi)R.$$

2. Сила натяжения. Удлинение кольца

$$\Delta l = L - 7R = (2\pi - 1)R \approx 5{,}28\,R.$$

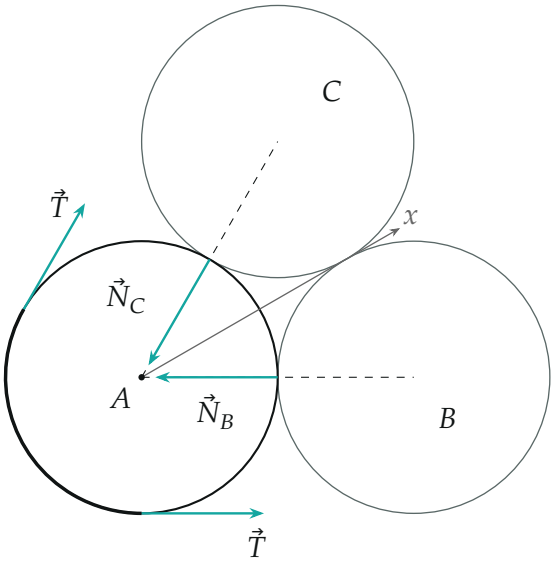
По закону Гука для всего кольца сила натяжения одна и та же в любом его сечении:

$$T = k\,\Delta l = (2\pi - 1)\,kR.$$

Кольцо можно считать невесомым, а трения о цилиндры нет, поэтому натяжение вдоль дуги не меняется.

3. Силы на цилиндр A**.** Рассмотрим систему «цилиндр A вместе с охватывающей его дугой кольца». Дуга — часть системы, её давление на цилиндр — внутренняя сила. Снаружи действуют:

- две силы натяжения T в сечениях, где дуга переходит в прямые участки, — вдоль прямых участков, то есть параллельно AB и AC;
- две силы N от цилиндров B и C — вдоль линий центров BA и CA (силы давления гладких цилиндров направлены по нормали к поверхности в точке касания, а нормаль проходит через оба центра).



Внешние силы на систему «цилиндр A + его дуга кольца»: натяжения $\vec{T}$ в концах дуги и давления $\vec{N}_B$, $\vec{N}_C$ соседей. Ось x — по биссектрисе угла BAC, к центру треугольника.

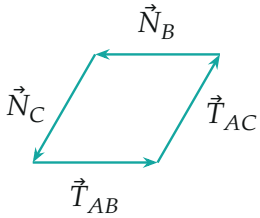
4. Равновесие. Первый закон Ньютона для этой системы: сумма внешних сил равна нулю,

$$\vec{T}_{AB} + \vec{T}_{AC} + \vec{N}_B + \vec{N}_C = 0.$$

Ось x направим по биссектрисе угла BAC — это ось симметрии картины, и проекции всех четырёх сил на перпендикулярную ей ось попарно уничтожаются. Каждая сила образует с осью x угол $30°$: силы T направлены вдоль сторон AB и AC к соседям (по x), силы N — от соседей

(против x). Проекция на x:

$$2T\cos 30^\circ - 2N\cos 30^\circ = 0 \quad \Longrightarrow \quad N = T.$$



Многоугольник сил замкнут: четыре вектора равной длины образуют ромб с углом 60°, значит, $N = T$.

Тот же результат даёт замкнутый многоугольник сил (рис. 4): векторы $\vec{T}$ и $\vec{N}$ попарно параллельны, и многоугольник замыкается только при $N = T$.

5. Ответ. По третьему закону Ньютона цилиндр A давит на B с той же силой, что B на A:

$$N = T = (2\pi - 1)\,kR \approx 5{,}28\,kR.$$

Обратите внимание. Силы натяжения на цилиндр действуют не только в концах дуги: дуга прижимает цилиндр по всей своей длине. Суммарное давление дуги на цилиндр равно векторной сумме натяжений в её концах — поэтому удобно включить дугу в систему, тогда её давление становится внутренней силой.

Проверка. Размерность: $[k][R] = $ Н/м·м $=$ Н. Предел: если бы длина свободного кольца была равна $(6 + 2\pi)R \approx 12{,}3R$, кольцо было бы не растянуто, и цилиндры не давили бы друг на друга; формула $N = k((6+2\pi)R - L_0)$ при этом даёт ноль. Смысл: каждый цилиндр стягивается кольцом к центру и упирается в двух соседей, и по симметрии давление соседа в точности равно натяжению.

Ответ. $N = (2\pi - 1)\,kR \approx 5{,}28\,kR.$