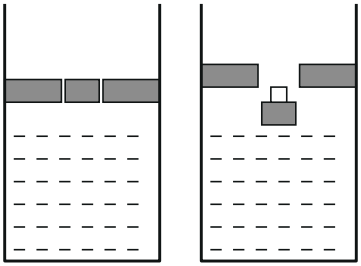
Поршень с вынимающейся серединой

Задача 3. [ИОШ 2023/24, 10 класс, задача 3] На поверхности воды в цилиндрическом сосуде лежит массивный подвижный поршень площадью S и толщиной h, плотно прилегающий к стенкам сосуда. Центральная часть поршня площадью $S/3$ вырезана из поршня и может перемещаться относительно него, не пропуская в зазоры воду (см. левый рисунок). На центральную часть кладут тело. При какой минимальной массе тела центральная часть выпадет из поршня (правый рисунок)? Чему равно перемещение центральной части и поршня относительно сосуда к этому моменту? Трение отсутствует.

1. При какой минимальной массе тела центральная часть выпадет из поршня?
2. Чему равно перемещение центральной части и поршня относительно сосуда к этому моменту?



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача гидростатики: равновесие плавающих тел и несжимаемость воды. Тело давит на центральную часть, она опускается относительно кольца поршня и вытесняет воду под кольцо, кольцо всплывает. Чем ниже центральная часть, тем больше давление воды под ней: она глубже кольца. Центральная часть выпадет, когда её верх опустится до низа кольца, то есть она уйдёт на глубину h под кольцо. Масса тела определяется давлением на этой глубине, перемещения — несжимаемостью воды.

Обозначения. M — масса всего поршня; ρ — плотность воды; p_0 — атмосферное давление; p — давление воды под кольцом поршня; d —

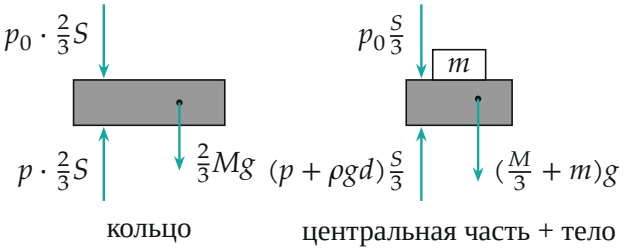
глубина низа центральной части под низом кольца; m — масса тела; x — перемещение центральной части вниз, y — перемещение кольца вверх относительно сосуда.

Пункт 1. Масса тела.

1. Кольцо. Кольцо — поршень без центральной части: масса $\frac{2}{3}M$ (поршень однородный), площадь $\frac{2}{3}S$. Первый закон Ньютона для кольца в проекции на вертикаль: сверху его давит атмосфера, снизу — вода,

$$pS \cdot \tfrac{2}{3} = p_0 S \cdot \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3}Mg \quad \Longrightarrow \quad p = p_0 + \frac{Mg}{S}.$$

Давление под кольцом не зависит от того, где центральная часть: оно задаётся только весом кольца на единицу площади.



Силы на кольцо и на центральную часть вместе с телом. Низ центральной части — на глубине d под низом кольца, поэтому давление воды под ней больше на $\rho g d$.

2. Центральная часть. Её низ на глубине d под низом кольца. По закону гидростатики давление воды под ней

$$p_1 = p + \rho g d.$$

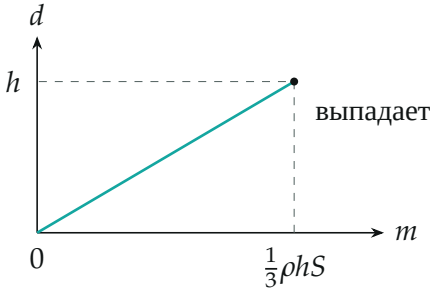
Первый закон Ньютона для центральной части вместе с телом (сверху — атмосфера и вес, снизу — вода):

$$\left(\frac{M}{3} + m\right)g + p_0 \frac{S}{3} = (p + \rho g d)\frac{S}{3}.$$

Подставим $p = p_0 + Mg/S$: члены $p_0 S/3$ и $Mg/3$ сокращаются,

$$mg = \rho g d \frac{S}{3} \quad \Longrightarrow \quad d = \frac{3m}{\rho S}.$$

Тело массы m уравновешивается только избыточным давлением воды $\rho g d$ под центральной частью: чем тяжелее тело, тем глубже она уходит.



Глубина центральной части под кольцом растёт пропорционально массе тела; при $d = h$ её верх выходит из отверстия.

3. Момент выпадения. Центральная часть выпадает, когда её верхняя грань опускается до нижней грани кольца, то есть $d = h$. Пока $d < h$, она удерживается в отверстии и вода над ней не затекает. Минимальная масса тела

$$m = \frac{\rho h S}{3}.$$

Пункт 2. Перемещения.

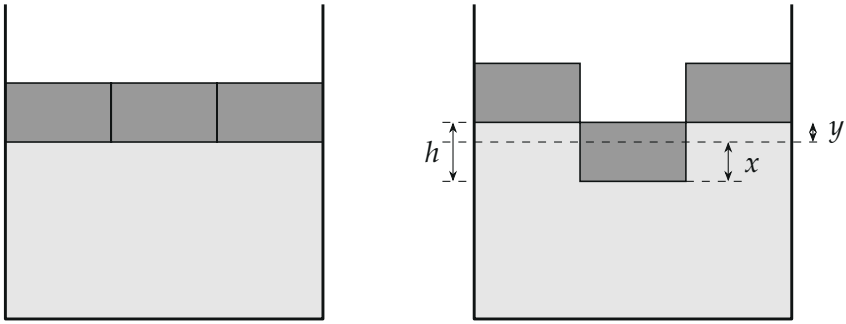
4. Несжимаемость воды. Объём воды в сосуде не меняется. Центральная часть опустилась на x и заняла под собой объём $x\frac{S}{3}$; ровно столько воды поднялось под кольцом, которое ушло вверх на y:

$$x \frac{S}{3} = y \frac{2S}{3} \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{x}{2}.$$

5. Относительное перемещение. К моменту выпадения центральная часть сместилась относительно кольца на $d = h$ (из положения «вро-

вень» до положения «верх на уровне низа кольца»):

$$x + y = h \quad \Longrightarrow \quad \frac{3}{2}x = h, \qquad x = \frac{2}{3}h, \qquad y = \frac{1}{3}h.$$



до после

Пунктир — исходный уровень низа поршня. Центральная часть опустилась на $x = \frac{2}{3}h$, кольцо поднялось на $y = \frac{1}{3}h$; вместе это h.

Обратите внимание. Масса самого поршня M в ответ не входит: она одинаково нагружает кольцо и центральную часть (на единицу площади) и сокращается. Перемещение центральной части относительно сосуда — не h, а $\frac{2}{3}h$: треть пути за неё «проходит» всплывающее кольцо.

Проверка. Размерность: $[\rho h S] = \text{кг/м}^3 \cdot \text{м} \cdot \text{м}^2 = \text{кг}$. Второй способ — через дно сосуда. Дно держит воду, поршень и тело, поэтому сила давления на дно выросла на mg. Давление у дна равно $p + \rho g H$, где H — высота низа кольца над дном; p не изменилось, а H выросла на y. Значит, $\rho g y S = mg$, и $y = \frac{m}{\rho S} = \frac{h}{3}$ — то же, что в пункте 2. Смысл: тело «топит» центральную часть ровно настолько, чтобы лишний столб воды над её низом весил столько же, сколько тело.

Ответ. 1) $m = \frac{1}{3}\rho h S$; 2) центральная часть опустится на $\frac{2}{3}h$, поршень (кольцо) поднимется на $\frac{1}{3}h$ относительно сосуда.