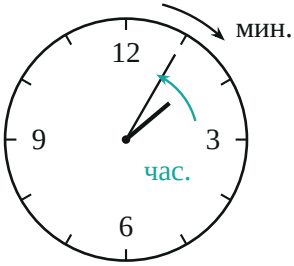
Сломанные часы

Задача 4. [ИОШ 2023/24, 10 класс, задача 4] После того как часы показали 12 часов ночи, что-то пошло не так, и часовая стрелка стала двигаться назад (противоположно обычному направлению) с втрое большей, чем раньше, угловой скоростью. Минутная стрелка продолжала идти правильно. Сколько раз за следующие сутки минутная стрелка на этих часах оказывалась перпендикулярной часовой стрелке? Ответ обосновать.



Поясняющий рисунок: минутная стрелка идёт по часовой, испорченная часовая — против.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на относительное вращательное движение. Перпендикулярность зависит только от угла между стрелками, то есть от поворота минутной стрелки относительно часовой. Стрелки вращаются навстречу, поэтому относительная угловая скорость — сумма модулей. За каждый полный относительный оборот угол между стрелками дважды проходит через 90°.

Обозначения. $\omega_м$, $\omega_ч$ — угловые скорости минутной и испорченной часовой стрелок (положительное направление — по ходу часов); φ — угол поворота минутной стрелки относительно часовой, отсчитанный от полуночи; $\tau = 24$ ч.

1. Угловые скорости. Минутная стрелка делает оборот за 1 ч:

$$\omega_м = \frac{2\pi}{1\text{ ч}}.$$

Исправная часовая стрелка делала оборот за 12 ч, испорченная идёт назад втрое быстрее, то есть оборот за 4 ч:

$$\omega_{\text{ч}} = -3 \cdot \frac{2\pi}{12\ \text{ч}} = -\frac{2\pi}{4\ \text{ч}}.$$

2. Относительное движение. Угловая скорость минутной стрелки относительно часовой (закон сложения угловых скоростей для вращения вокруг одной оси)

$$\omega_{\text{отн}} = \omega_{\text{м}} - \omega_{\text{ч}} = 2\pi\left(1 + \frac{1}{4}\right)\ \text{ч}^{-1} = \frac{5\pi}{2}\ \text{ч}^{-1}.$$

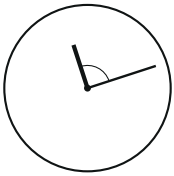
Знак плюс у второго слагаемого: стрелки идут навстречу, и относительная скорость больше каждой из них. В полночь стрелки совпадали, $\varphi(0) = 0$, поэтому

$$\varphi(t) = \omega_{\text{отн}} t.$$

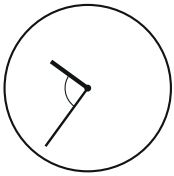
Один относительный оборот занимает $2\pi/\omega_{\text{отн}} = 0{,}8$ ч $= 48$ мин.



$t = 0$



$t = 12$ мин
$\varphi = 90°$



$t = 36$ мин
$\varphi = 270°$

Положения стрелок (толстая — часовая, тонкая — минутная) в полночь и в два первых момента перпендикулярности. Угол между стрелками прямой.

3. Условие перпендикулярности. Стрелки перпендикулярны, когда угол поворота минутной относительно часовой равен 90° или 270° плюс целое число оборотов:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \pi n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

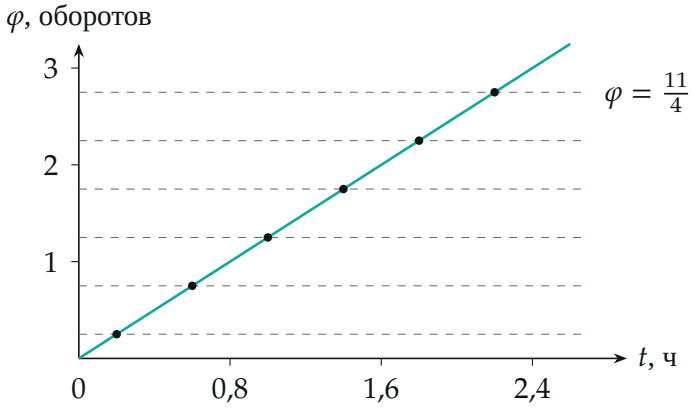
Значит, на каждый относительный оборот приходится ровно два момен-

та перпендикулярности. Первый — при $t = \dfrac{\pi/2}{\omega_{\text{отн}}} = 0{,}2$ ч $= 12$ мин, следующие — через каждые 24 мин.

4. Число оборотов за сутки. За $\tau = 24$ ч

$$N = \frac{\omega_{\text{отн}}\tau}{2\pi} = \frac{5}{4}\cdot 24 = 30$$

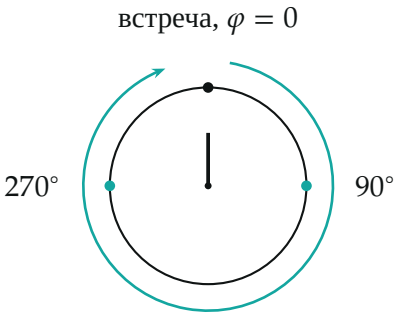
относительных оборотов. Это целое число: минутная стрелка делает 24 оборота по ходу, часовая — 6 оборотов против хода, и в конце суток стрелки снова совпадают на 12. Ни начало, ни конец суток моментами перпендикулярности не являются, поэтому на границах ничего не теряется и не добавляется.



Угол поворота минутной стрелки относительно часовой растёт равномерно; точки — моменты перпендикулярности ($\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$, … оборота). За первые 2,4 ч — 3 оборота и 6 точек; за сутки — 30 оборотов и 60 точек.

5. Ответ. $2N = 60$ раз.

Второй способ (через встречи). Стрелки идут навстречу, каждая встреча — это один относительный оборот. За сутки минутная стрелка проходит 24 оборота, часовая — 6 оборотов навстречу, всего $24+6 = 30$ встреч, а между соседними встречами — две перпендикулярности. Снова 60.



Один относительный оборот в системе отсчёта часовой стрелки (она неподвижна и смотрит вверх): минутная стрелка дважды проходит положение под прямым углом.

Обратите внимание. Сложение $24 + 6$, а не вычитание: у исправных часов стрелки идут в одну сторону, и относительных оборотов $24 - 2 = 22$ (44 перпендикулярности за сутки). Здесь часовая стрелка идёт навстречу, и обороты складываются.

Проверка. Размерность: $\omega\tau$ — безразмерный угол. Предел: если бы часовая стрелка стояла, относительных оборотов было бы 24 и перпендикулярностей 48; встречное движение добавляет $2 \cdot 6 = 12$. Смысл: чем быстрее стрелки бегут навстречу, тем чаще они встречаются и тем чаще оказываются под прямым углом.

Ответ. 60 раз.