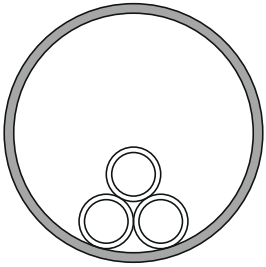
Три трубы в большой трубе

Задача 6. [ИОШ 2023/24, 10 класс, задача 6] Три одинаковых массивных трубы радиуса r вставлены в большую горизонтальную трубу радиуса R и покоятся в положении, показанном на рисунке. При каком соотношении r и R возможно такое равновесие труб, если трение между всеми трубами отсутствует?



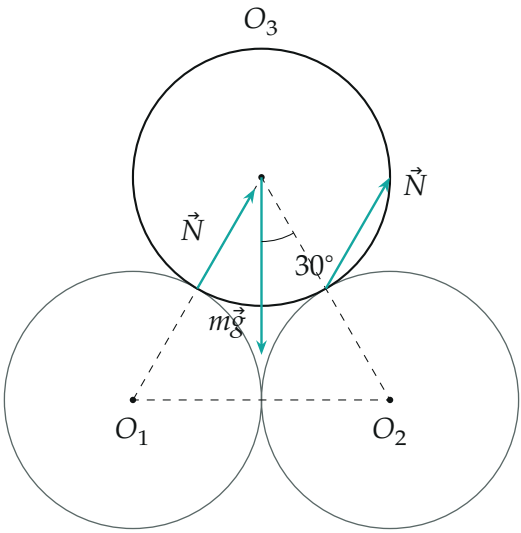
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равновесие тел без трения (статика). Верхняя труба давит на нижние и стремится раздвинуть их в стороны. Без большой трубы нижние раскатились бы. Внутри большой трубы её стенка давит на каждую нижнюю трубу под углом к вертикали, и горизонтальная составляющая этой силы толкает нижнюю трубу к соседке. Чем больше R, тем ближе дно большой трубы к горизонтальной плоскости и тем меньше эта составляющая. Граница равновесия — когда нижние трубы перестают давить друг на друга.

Обозначения. m — масса малой трубы; N — сила давления верхней трубы на нижнюю; F — сила давления нижних труб друг на друга; N_1 — сила давления большой трубы на нижнюю; α — угол между N_1 и вертикалью; O — центр большой трубы; O_1, O_2, O_3 — центры нижней левой, нижней правой и верхней труб.

1. Верхняя труба. Центры малых труб образуют равносторонний треугольник со стороной $2r$: трубы касаются. Сила давления гладкой трубы направлена по линии центров, поэтому обе силы N на верхнюю трубу составляют $30°$ с вертикалью. Первый закон Ньютона для верхней тру-

бы в проекции на вертикаль:

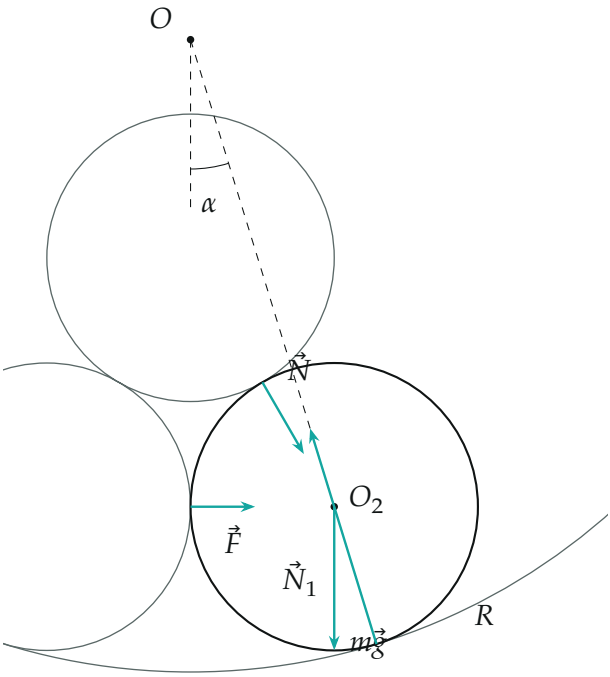
$$2N\cos 30^\circ = mg \quad \Longrightarrow \quad N = \frac{mg}{\sqrt{3}}.$$



Силы на верхнюю трубу: тяжесть и давления нижних труб вдоль линий центров, под 30° к вертикали.

2. Нижняя труба: силы. На правую нижнюю трубу действуют (рис. 3):

- сила тяжести mg вниз;
- давление верхней трубы N вдоль O_3O_2 — вниз и вправо, под 30° к вертикали (третий закон Ньютона);
- давление левой нижней трубы F вдоль O_1O_2 — горизонтально вправо;
- давление большой трубы N_1 по нормали к её стенке, то есть от точки касания к центру O — вверх и влево.



Силы на правую нижнюю трубу. $\vec{N}_1$ направлена от точки касания к центру O большой трубы, под углом α к вертикали.

3. Угол α. Центр нижней трубы O_2 лежит на расстоянии $R - r$ от O (трубы касаются изнутри) и на расстоянии r от вертикали через O (нижние трубы касаются друг друга). Из прямоугольного треугольника с гипотенузой $R - r$:

$$\sin\alpha = \frac{r}{R-r}, \qquad \cos\alpha = \frac{\sqrt{(R-r)^2 - r^2}}{R-r} = \frac{\sqrt{R^2 - 2Rr}}{R-r},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{r}{\sqrt{R^2 - 2Rr}}.$$

4. Равновесие нижней трубы. Первый закон Ньютона в проекциях

на вертикаль (вверх) и горизонталь (вправо):

$$N_1\cos\alpha - mg - N\cos 30^\circ = 0, \qquad F + N\sin 30^\circ - N_1\sin\alpha = 0.$$

Из первого с $N = mg/\sqrt{3}$: $N_1\cos\alpha = mg + \frac{mg}{2} = \frac{3}{2}mg$. Подставляем во второе:

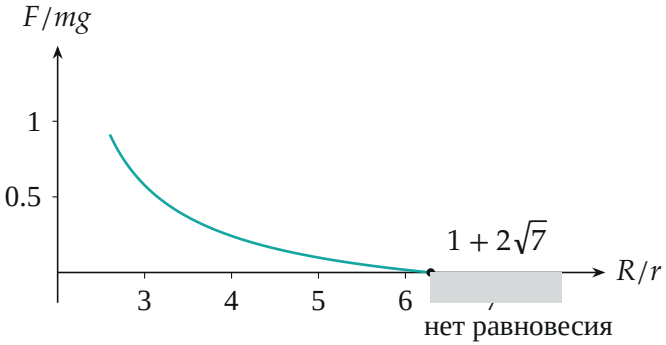
$$F = \frac{3}{2}mg\ \operatorname{tg}\alpha - \frac{mg}{2\sqrt{3}} = \frac{mg}{2\sqrt{3}}\Big(\frac{3\sqrt{3}\,r}{\sqrt{R^2-2Rr}} - 1\Big).$$

5. Граница равновесия. Нижние трубы могут только давить друг на друга, но не тянуть: $F \geq 0$. Иначе нижние трубы разъезжаются, верхняя проваливается между ними, и картина с рисунка разрушается. Условие $F \geq 0$:

$$\sqrt{R^2-2Rr} \leq 3\sqrt{3}\,r \quad\Longleftrightarrow\quad \Big(\frac{R}{r}\Big)^2 - 2\frac{R}{r} - 27 \leq 0,$$

корни квадратного трёхчлена $1 \pm 2\sqrt{7}$, поэтому

$$\frac{R}{r} \leq 1 + 2\sqrt{7} \approx 6{,}29.$$

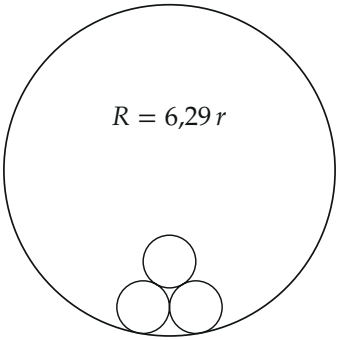


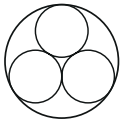
Сила давления нижних труб друг на друга (в единицах mg) в зависимости от R/r. При $R/r > 1 + 2\sqrt{7}$ она должна была бы стать отрицательной — равновесие невозможно.

6. Нижняя граница (геометрия). При малом R три трубы в такой расстановке просто не помещаются: верхняя упирается в стенку. Расстояние от O до центра верхней трубы равно $\sqrt{R^2-2Rr}-\sqrt{3}r$ (центр O_3 выше O_2 на $\sqrt{3}r$), и оно должно быть не больше $R-r$:

$$\sqrt{3}\,r-\sqrt{R^2-2Rr}\le R-r \quad\Longrightarrow\quad \frac{R}{r}\ge 1+\frac{2}{\sqrt{3}}\approx 2{,}15.$$

При этом значении верхняя труба касается стенки, но расстановка с рисунка ещё возможна ($F>0$).





Две крайние расстановки. Слева: нижние трубы касаются, но уже не давят друг на друга ($F=0$). Справа: верхняя труба касается большой трубы.

Обратите внимание. Нарушение равновесия — это обращение в ноль силы F между нижними трубами, а не силы N_1: стенка давит на нижние трубы при любом R.

Проверка. Размерность: F выражена через mg и отношение длин — сила. Предел: при $R/r=3$ (большая труба малая) $\operatorname{tg}\alpha=1/\sqrt{3}$, $\alpha=30^\circ$, и $F=\frac{mg}{2\sqrt{3}}(3-1)=\frac{mg}{\sqrt{3}}$ — нижние трубы сильно прижаты. Смысл: широкая труба почти не «поджимает» нижние трубы с боков, и верхняя их раскатывает.

Ответ. Равновесие возможно при $\dfrac{R}{r}\le 1+2\sqrt{7}\approx 6{,}29$ (и, чтобы трубы вообще поместились так, $\dfrac{R}{r}\ge 1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\approx 2{,}15$).