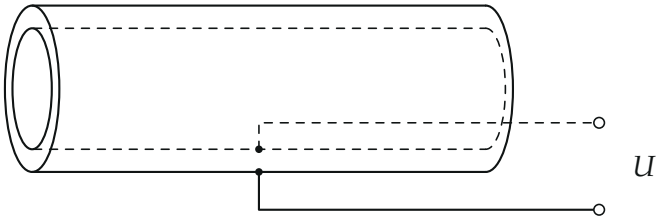
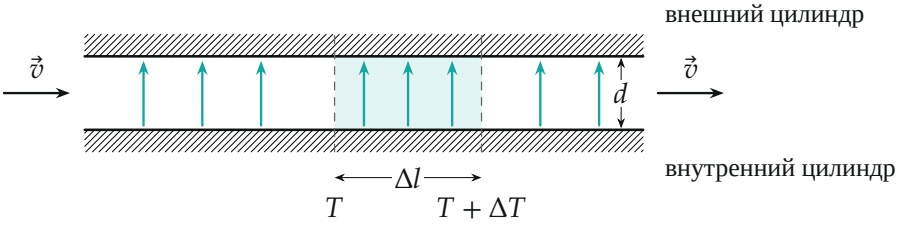
Водонагреватель с коаксиальными цилиндрами

Задача 1. [ИОШ 2023/24, 11 класс, задача 1] В водонагревателе вода медленно протекает между двумя коаксиальными металлическими цилиндрами с радиусами R_1 и R_2, причём расстояние между цилиндрами много меньше их радиусов. К цилиндрам приложено постоянное электрическое напряжение U (см. рисунок), в результате чего между цилиндрами течёт электрический ток, нагревая воду. Плотность воды — ρ_0, удельное сопротивление — ρ, удельная теплоёмкость — c, скорость протекания воды — v. Найти изменение температуры воды на единицу длины цилиндров. Теплопотери отсутствуют.



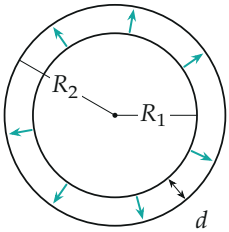
▲ **Решение.** **Что происходит.** Вода течёт вдоль оси, а электрический ток идёт поперёк потока — от одного цилиндра к другому через воду — и выделяет в ней теплоту. Течение установившееся: температура в каждой точке со временем не меняется. Значит, теплота, выделившаяся в воде на небольшом отрезке цилиндров, целиком уносится водой, которая протекла через этот отрезок. Главная идея — уравнение теплового баланса для малого элемента длины: «выделилось = унесено».

Обозначения. Зазор $d = R_2 - R_1 \ll R_1$, поэтому любой радиус между R_1 и R_2 с точностью до малых поправок равен одному и тому же R. Мысленно выделим элемент установки длиной Δl (на рисунке выделен). Вода входит в него с температурой T, выходит с температурой $T + \Delta T$; за малое время Δt через него проходит вода массой Δm.

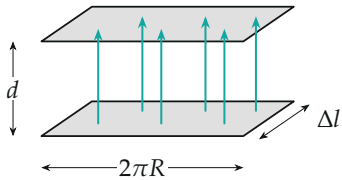


Продольный разрез слоя воды (зазор d растянут): вода течёт вдоль слоя, ток — поперёк.

1. Сопротивление водяного слоя элемента. Ток идёт от внутреннего цилиндра к внешнему по радиусам, то есть поперёк слоя толщиной d. Поскольку $d \ll R$, кривизной слоя можно пренебречь: мысленно разрежем элемент по образующей и развернём. Получится плоский слой воды толщиной d между двумя металлическими пластинами площадью $S = 2\pi R\,\Delta l$ каждая — ток идёт по нему перпендикулярно пластинам, как в плоском конденсаторе.



а) сечение: ток идёт по радиусам



б) развёртка: плоский слой воды

Слой воды между цилиндрами и его развёртка. Направление тока на рисунке условное.

Сопротивление плоского слоя: длина пути тока d, площадь, поперёк которой он течёт, S:

$$r = \frac{\rho\, d}{S} = \frac{\rho\,(R_2 - R_1)}{2\pi R\,\Delta l}.$$

2. Выделившаяся теплота. Каждый цилиндр — металл, поэтому все его точки имеют один потенциал, и на любой элемент слоя воды прихо-

дится полное напряжение U. Мощность тока в слое U^2/r (закон Джоуля — Ленца для заданного напряжения), за время Δt выделяется

$$\delta Q = \frac{U^2}{r}\,\Delta t = \frac{U^2\,2\pi R\,\Delta l}{\rho\,(R_2 - R_1)}\,\Delta t.$$

3. Масса протёкшей воды. Площадь поперечного сечения потока — кольца между цилиндрами — $\pi(R_2^2 - R_1^2) = \pi(R_2 - R_1)(R_2 + R_1) \approx 2\pi R\,(R_2 - R_1)$. За время Δt через это сечение проходит объём $v\,\Delta t \cdot 2\pi R\,(R_2 - R_1)$, а значит, масса

$$\Delta m = \rho_0\, v\,\Delta t \cdot 2\pi R\,(R_2 - R_1).$$

4. Тепловой баланс элемента. Установившееся течение, потерь нет: вся выделившаяся теплота уходит на нагрев воды, протёкшей через элемент, от T до $T + \Delta T$:

$$\delta Q = c\,\Delta m\,\Delta T \quad\Longrightarrow\quad \frac{U^2\,2\pi R\,\Delta l}{\rho\,(R_2 - R_1)}\,\Delta t = c\,\rho_0\,v\,\Delta t \cdot 2\pi R\,(R_2 - R_1)\,\Delta T.$$

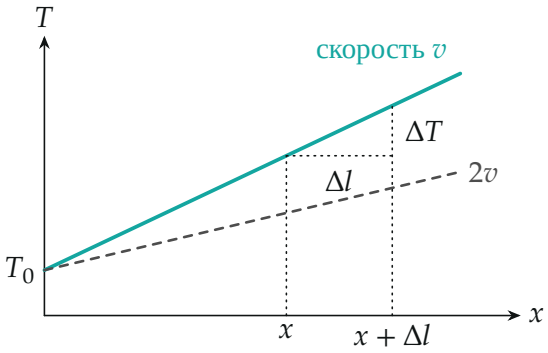
Множители Δt и $2\pi R$ сокращаются — ни время наблюдения, ни выбор радиуса R на ответ не влияют. Отсюда

$$\frac{\Delta T}{\Delta l} = \frac{U^2}{c\,\rho_0\,\rho\,v\,(R_2 - R_1)^2}.$$

Знак: $\Delta T > 0$ — по ходу течения вода нагревается.

5. Качественная картина. Правая часть не зависит от того, где расположен элемент. Значит, нагрев на каждом сантиметре одинаков и температура воды растёт вдоль цилиндров линейно; чем быстрее течёт вода, тем меньше успевает нагреться её порция и тем положе прямая.

Обратите внимание. Буквой ρ в условии обозначено удельное сопротивление воды, а плотность воды — ρ_0. Они стоят в ответе рядом и легко путаются.



Температура воды вдоль цилиндров: наклон прямой — искомая величина $\Delta T/\Delta l$; при вдвое большей скорости — вдвое меньше.

Проверка. Размерность (учтём $\text{В}^2/\text{Ом} = \text{Вт} = \text{Дж/с}$):

$$\frac{\text{В}^2}{\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\cdot\text{Ом}\cdot\text{м}\cdot\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}\cdot\frac{\text{м}}{\text{с}}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Дж/с}}{\text{Дж}\cdot\text{м}/(\text{К}\cdot\text{с})} = \frac{\text{К}}{\text{м}}.$$

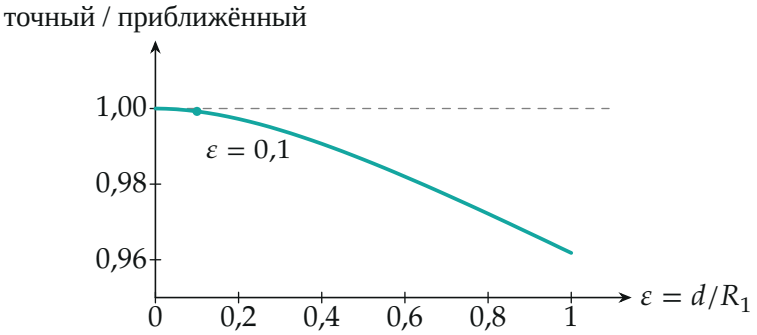
Предельные случаи: при вдвое большем U мощность растёт вчетверо — нагрев вчетверо больше; при вдвое большей скорости воды каждая порция греется вдвое меньше; при вдвое меньшем зазоре сопротивление слоя вдвое меньше (мощность вдвое больше), но воды в слое тоже вдвое меньше, поэтому нагрев в $2\cdot 2 = 4$ раза больше — так и получается из d^{-2}.

Второй способ — без разворачивания слоя. Тонкие цилиндрические слои воды толщиной dr на радиусе r соединены последовательно, сопротивление каждого $\rho\,dr/(2\pi r\,\Delta l)$. Сложим их от R_1 до R_2: $r_{\text{точн}} = \dfrac{\rho}{2\pi\Delta l}\ln\dfrac{R_2}{R_1}$. Площадь потока $\pi(R_2^2 - R_1^2)$. Тот же баланс даёт

$$\frac{\Delta T}{\Delta l} = \frac{2U^2}{\rho\, c\, \rho_0\, v\,(R_2^2 - R_1^2)\ln(R_2/R_1)}.$$

При $R_2 = R_1(1+\varepsilon)$ отношение точного результата к найденному выше равно $\dfrac{2\varepsilon}{(2+\varepsilon)\ln(1+\varepsilon)} \approx 1 - \dfrac{\varepsilon^2}{12}$: при $d/R_1 = 0{,}1$ они различаются

меньше чем на 0,1 %, и условие $d \ll R$ нужно ровно для этого.



Отношение точного результата к приближённому при растущем зазоре: даже при $d = R_1$ разница около 4 %.

Смысл результата: нагрев на единицу длины задаётся отношением мощности тока на единицу длины к теплоёмкости протекающего потока воды; у тонкого зазора сопротивление слоя мало, мощность велика, но и воды мало — отсюда d^{-2}.

Ответ. $\dfrac{\Delta T}{\Delta l} = \dfrac{U^2}{c\,\rho_0\,\rho\,v\,(R_2 - R_1)^2}$.