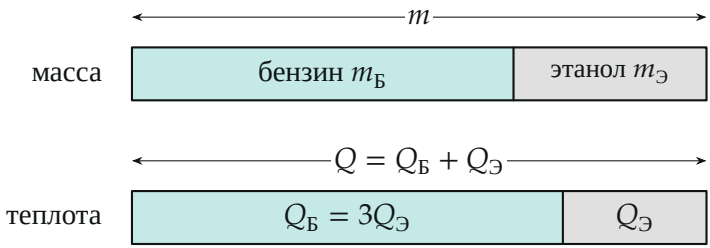
Бензин с биоэтанолом

Задача 2. [ИОШ 2023/24, 11 класс, задача 2] Во многих странах мира с целью экономии ископаемого топлива (нефти) часть бензина в автомобильном топливе заменяют спиртом, изготовленным из растительного сырья (биоэтанолом). Приготовили такую смесь бензина и биоэтанола, что вклад бензина в теплотворную способность смеси втрое больше вклада биоэтанола. Считая, что удельная теплота сгорания бензина $q_Б = 44$ МДж/кг, а биоэтанола $q_Э = 29$ МДж/кг, найти массовые доли бензина и этанола в смеси. Найти также удельную теплоту сгорания смеси.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Теплота, которая выделится при сгорании смеси, складывается из теплот сгорания бензина и этанола. Вклад каждого компонента — его масса, умноженная на удельную теплоту сгорания. Слова «вклад бензина втрое больше» — это первое уравнение на массы, равенство массы смеси сумме масс компонентов — второе. Удельная теплота сгорания смеси — теплота на единицу массы смеси, то есть среднее значение, взвешенное по массовым долям. Класс задачи: смесь двух компонентов и средневзвешенная величина.

Обозначения. m — масса смеси (произвольная, в ответ не войдёт), $m_Б$ и $m_Э$ — массы бензина и этанола, $w_Б = m_Б/m$ и $w_Э = m_Э/m$ — массовые доли, $Q_Б = m_Б q_Б$ и $Q_Э = m_Э q_Э$ — вклады в теплоту сгорания, q — удельная теплота сгорания смеси.



Доли отрезков соответствуют ответу: массы — 0,66 : 0,34, вклады в теплоту — 3 : 1.

Пункт 1. Массовые доли.

1. Два уравнения. Вклад бензина втрое больше вклада этанола: $Q_Б = 3Q_Э$. Масса смеси состоит из двух масс. Записываем оба условия:

$$m_Б q_Б = 3\,m_Э q_Э, \qquad m_Б + m_Э = m.$$

Разделим оба уравнения на m — тогда неизвестными остаются только безразмерные доли, а масса смеси исчезает:

$$w_Б q_Б = 3\,w_Э q_Э, \qquad w_Б + w_Э = 1.$$

2. Решаем. Подставим $w_Э = 1 - w_Б$ в первое уравнение: $w_Б q_Б = 3\,(1 - w_Б)\,q_Э$, откуда $w_Б\,(q_Б + 3q_Э) = 3q_Э$:

$$w_Б = \frac{3q_Э}{3q_Э + q_Б} = \frac{87}{131} \approx 0{,}66,$$
$$w_Э = 1 - w_Б = \frac{q_Б}{3q_Э + q_Б} = \frac{44}{131} \approx 0{,}34.$$

Обратите внимание: «втрое больше» сказано про вклад в теплоту, а не про массу. Масса бензина больше массы этанола только в $\dfrac{m_Б}{m_Э} = \dfrac{3q_Э}{q_Б} \approx 2$ раза: этанола требуется больше, потому что его теплота сгорания меньше.

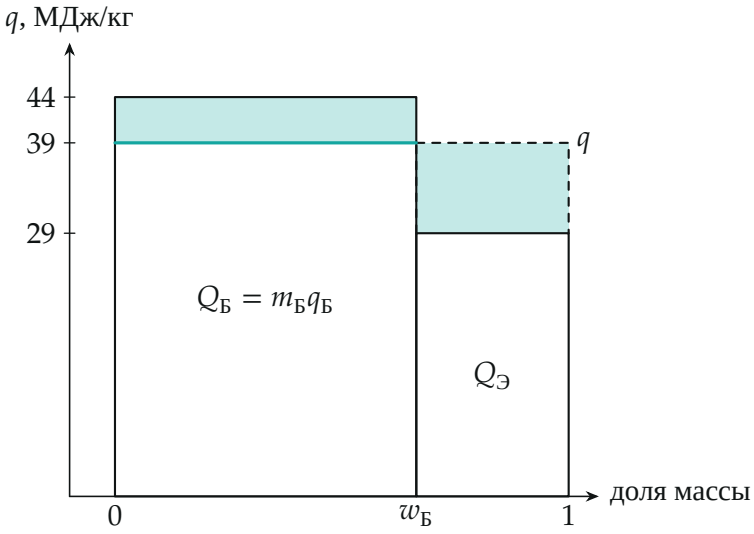
Пункт 2. Удельная теплота сгорания смеси.

3. Среднее, взвешенное по массам. Вся теплота смеси $Q = Q_Б + Q_Э = m_Б q_Б + m_Э q_Э$, делим на массу смеси:

$$q = \frac{Q}{m} = w_Б q_Б + w_Э q_Э = \frac{3q_Э q_Б + q_Б q_Э}{3q_Э + q_Б}$$
$$= \frac{4\,q_Б q_Э}{3q_Э + q_Б} = \frac{4 \cdot 44 \cdot 29}{131} \approx 39{,}0 \text{ МДж/кг}.$$

Геометрически: теплота компонента — площадь прямоугольника «масса × удельная теплота», смеси — сумма площадей, а q — высота прямоугольника той же площади и той же ширины (рисунок). Он выравнивает «горки»: бирюзовый кусок над линией q у бензина имеет ту же площадь,

что бирюзовое «недостающее» у этанола.



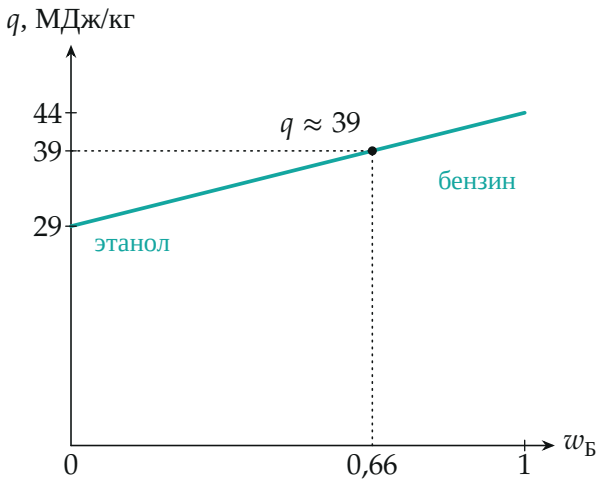
Площадь прямоугольника (масса × удельная теплота) — теплота сгорания. Высота прямоугольника такой же полной площади и той же ширины — удельная теплота смеси q: бирюзовые куски равны по площади.

4. Второй способ — через вклады. Пусть вклад этанола $Q_Э$, тогда вклад бензина $3Q_Э$ и общая теплота $Q = 4Q_Э$. Массы компонентов $m_Э = Q_Э/q_Э$ и $m_Б = 3Q_Э/q_Б$. Тогда

$$q = \frac{Q}{m_Б + m_Э} = \frac{4Q_Э}{3Q_Э/q_Б + Q_Э/q_Э} = \frac{4}{3/q_Б + 1/q_Э} = \frac{4q_Б q_Э}{3q_Э + q_Б}.$$

Результат тот же; это среднее гармоническое, взвешенное по вкладам, — тогда, когда известны не массы, а теплоты, усредняют обратные величины.

5. Как q зависит от состава. Из формулы пункта 3 видно, что q — линейная функция доли бензина: $q = q_Э + (q_Б - q_Э)\, w_Б$. Для найденной доли получаем те же 39 МДж/кг.

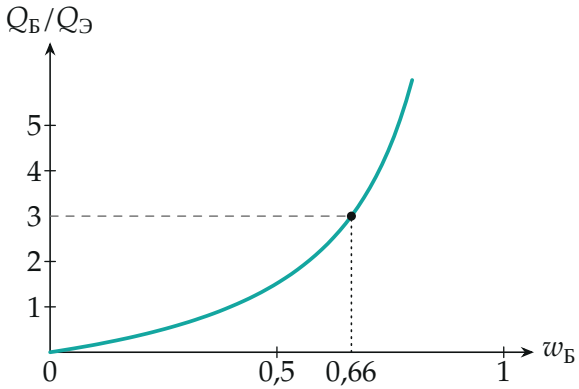


Удельная теплота сгорания смеси — линейная функция доли бензина: от $q_Э$ до $q_Б$.

Почему решение единственно. Отношение вкладов

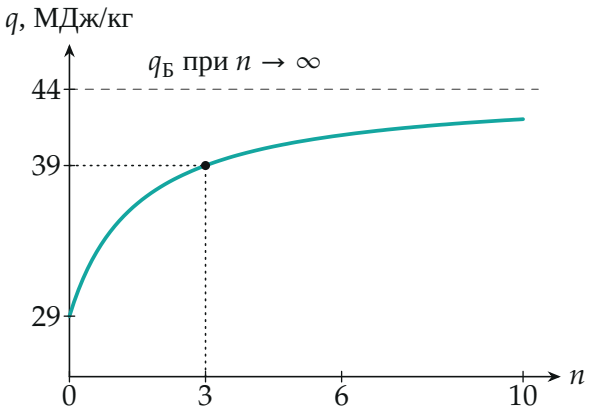
$$\frac{Q_Б}{Q_Э} = \frac{w_Б q_Б}{(1 - w_Б)\, q_Э}$$

монотонно растёт от нуля (нет бензина) до бесконечности (нет этанола), поэтому значение 3 достигается ровно один раз.



Отношение вкладов бензина и этанола растёт вместе с долей бензина и равно 3 только в одной точке — решение единственно.

Проверка. Вклады: $Q_Б = 0{,}664 \cdot 44 \approx 29{,}2$ и $Q_Э = 0{,}336 \cdot 29 \approx 9{,}74$ МДж на килограмм смеси, их отношение равно 3,00, сумма $38{,}96 \approx 39{,}0$ МДж/кг. Размерность: доли безразмерны, q в МДж/кг. Смесь не может быть «калорийнее» лучшего компонента и «беднее» худшего: $29 < 39 < 44$. Обобщение: если бы вклад бензина был в n раз больше, то $q = \dfrac{(n+1)\,q_Б q_Э}{n q_Э + q_Б}$; при $n = 0$ получаем $q_Э$ (один этанол), при $n \to \infty$ — $q_Б$ (один бензин), как и должно быть.



Удельная теплота сгорания смеси при разном отношении вкладов $n = Q_Б/Q_Э$ (ось q начинается с 25): от $q_Э$ при $n = 0$ до $q_Б$ при $n \to \infty$; точка — условие задачи, $n = 3$.

Смысл: смесь, в которой бензин даёт три четверти теплоты, содержит около двух третей бензина по массе и сжигается так, будто имеет теплоту сгорания 39 МДж/кг — на 11 % меньше, чем у чистого бензина.

Ответ. 1) $w_Б \approx 0{,}66$, $w_Э \approx 0{,}34$; 2) $q \approx 39$ МДж/кг.