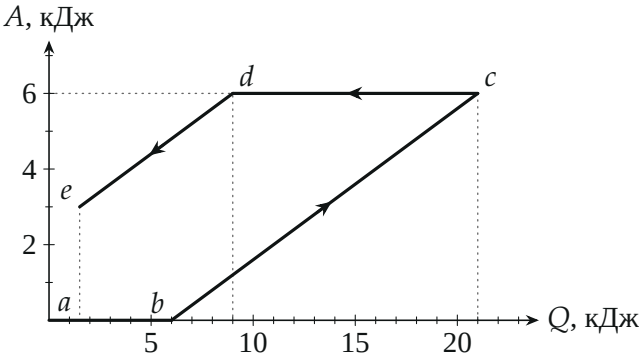
Одноатомный газ: график $A(Q)$

Задача 3. [ИОШ 2023/24, 11 класс, задача 3] С одноатомным идеальным газом происходит процесс a–b–c–d–e, для которого дан график зависимости работы, совершённой газом с начала процесса, от количества теплоты, полученной газом с начала процесса (участки графика b–c и d–e параллельны). Известно, что $p_a V_a = 2$ кДж, где p_a и V_a — давление и объём газа в начале процесса. Построить график зависимости давления газа от его объёма в процессе a–b–c–d–e.

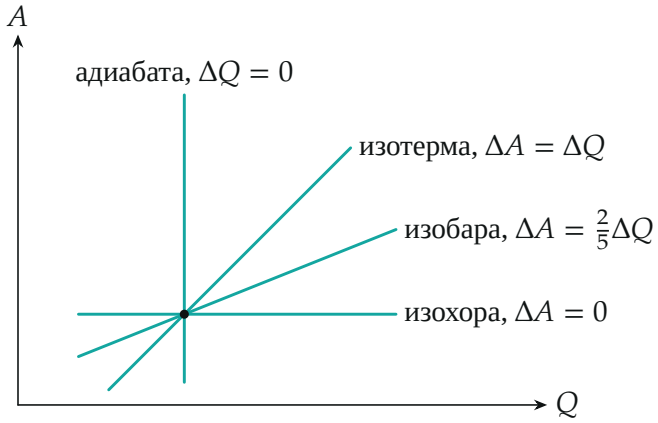


▲ **Решение. Что происходит.** По осям графика отложены работа A и теплота Q, накопленные с начала процесса. Поэтому для участка важны не координаты точек, а приращения ΔQ и ΔA — разности координат его концов. По ним мы определим тип процесса на каждом участке, а потом из первого закона термодинамики найдём давление и объём в каждом следующем состоянии. Класс задачи: восстановление процесса по графику $A(Q)$ — участок за участком. Все давления и объёмы будем выражать через p_a и V_a: так остаётся минимум букв.

Обозначения и законы. Для одноатомного идеального газа $U = \frac{3}{2}\nu RT = \frac{3}{2}pV$. Первый закон термодинамики для газа: $\Delta Q = \Delta U + \Delta A$, работа $A = \int p\,dV$.

1. Как по наклону узнать процесс. Для малого шага $dQ = dU + dA = \frac{3}{2}d(pV) + p\,dV$. Рассмотрим четыре процесса.

- Изохора ($dV = 0$): работа не совершается, A не меняется — участок горизонтален.
- Изобара ($p = \text{const}$): $dA = p\,dV$, $dQ = \frac{3}{2}p\,dV + p\,dV = \frac{5}{2}dA$, то есть $\Delta A/\Delta Q = \frac{2}{5}$.
- Изотерма ($dU = 0$): $dQ = dA$, наклон 1.
- Адиабата ($dQ = 0$): вертикаль.

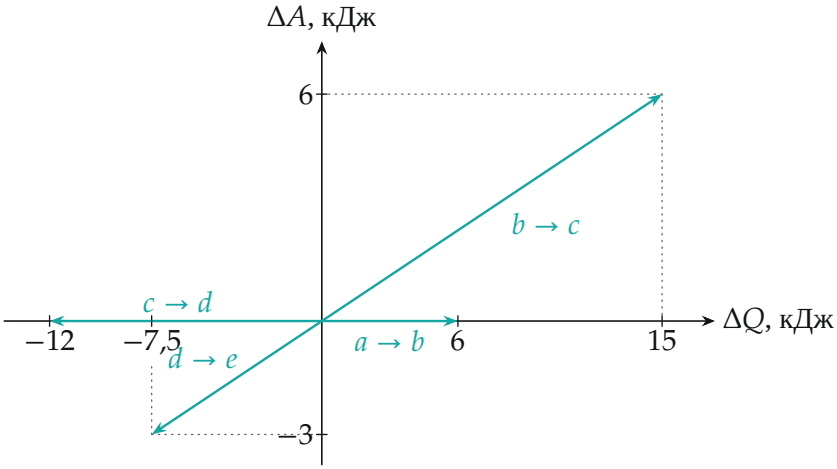


Участки графика $A(Q)$ для разных процессов одноатомного газа; направление движения по участку может быть любым: газ получает теплоту (вправо) или отдаёт (влево).

Наклон $2/5$ у прямого участка — признак именно изобары, и обратное тоже верно. Пусть $dA = \frac{2}{5}dQ$, тогда $dU = dQ - dA = \frac{3}{2}dA$. Подставим $dU = \frac{3}{2}d(pV)$ и $dA = p\,dV$: $\frac{3}{2}d(pV) = \frac{3}{2}p\,dV$, то есть $p\,dV + V\,dp = p\,dV$, откуда $V\,dp = 0$ и $p = \text{const}$. Аналогично, если A не меняется ($dA = p\,dV = 0$), то $dV = 0$ — изохора.

2. Что дают участки графика. Снимем с графика приращения (конец минус начало; ΔQ и ΔA — в кДж):

уч.	ΔQ	ΔA	$\Delta A/\Delta Q$	процесс
a–b	6	0	0	изохора, нагрев
b–c	$21 - 6 = 15$	$6 - 0 = 6$	$2/5$	изобара, расширение
c–d	$9 - 21 = -12$	0	0	изохора, охлаждение
d–e	$1{,}5 - 9 = -7{,}5$	$3 - 6 = -3$	$2/5$	изобара, сжатие



Приращения $(\Delta Q; \Delta A)$ четырёх участков, отложенные от начала координат. Векторы $b \to c$ и $d \to e$ лежат на одной прямой с наклоном $2/5$.

Обратите внимание: у участков c–d и d–e приращения отрицательны, хотя сами Q и A в точках d и e положительны. Газ на c–d отдаёт 12 кДж теплоты, на d–e — 7,5 кДж, а работа на d–e отрицательна: газ сжимают.

3. Участок a–b**.** Изохора, $V = V_a$, $A = 0$, газ получает теплоту, значит, нагревается, и давление растёт. Первый закон: вся теплота идёт на внутреннюю энергию,

$$Q_{ab} = \Delta U = \frac{3}{2}\,(p_b V_a - p_a V_a) = 6 \text{ кДж}.$$

Отсюда $p_b V_a - p_a V_a = 4$ кДж, и при $p_a V_a = 2$ кДж получаем $p_b V_a = 6$ кДж, то есть $p_b = 3p_a$.

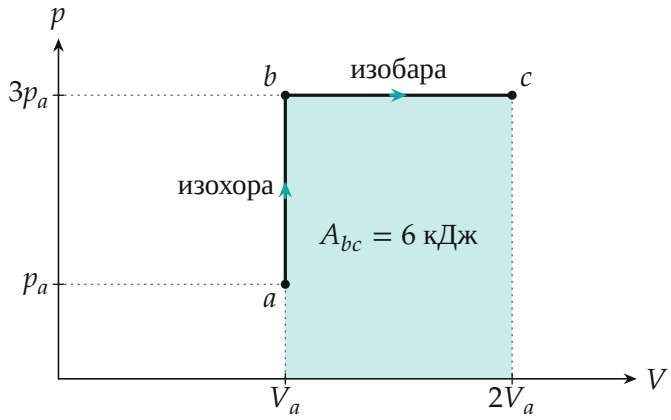
4. Участок b–c**.** Изобара ($\Delta A/\Delta Q = 2/5$), давление остаётся $p_c = p_b = 3p_a$; газ расширяется (работа положительна) и получает теплоту. Работа изобарного процесса — площадь прямоугольника под отрезком на p–V диаграмме (рисунок):

$$A_{bc} = p_b\,(V_c - V_a) = 3p_a V_c - 3p_a V_a = 6 \text{ кДж},$$

$$3p_a V_c = 6 + 3 \cdot 2 = 12 \text{ кДж}, \qquad p_a V_c = 4 \text{ кДж} = 2\,p_a V_a,$$

то есть $V_c = 2V_a$. Проверим теплоту: $Q_{bc} = \frac{5}{2}\,A_{bc} = 15$ кДж — как на

графике.



5. Участок *c*–*d***.** Изохора (A не меняется), $V_d = V_c = 2V_a$; теплота отдаётся, газ остывает, давление падает. Первый закон:

$$Q_{cd} = \frac{3}{2}(p_d V_c - p_c V_c) = \frac{3}{2}(2p_d V_a - 6p_a V_a) = -12 \text{ кДж}.$$

Отсюда $2p_d V_a - 12$ кДж $= -8$ кДж, $2p_d V_a = 4$ кДж, и $p_d V_a = 2$ кДж, то есть $p_d = p_a$: давление упало до начального.

6. Участок *d*–*e***.** Изобара при $p = p_d = p_a$, сжатие ($A < 0$), газ отдаёт теплоту. Работа:

$$A_{de} = p_a(V_e - V_d) = p_a V_e - 2p_a V_a = -3 \text{ кДж},$$

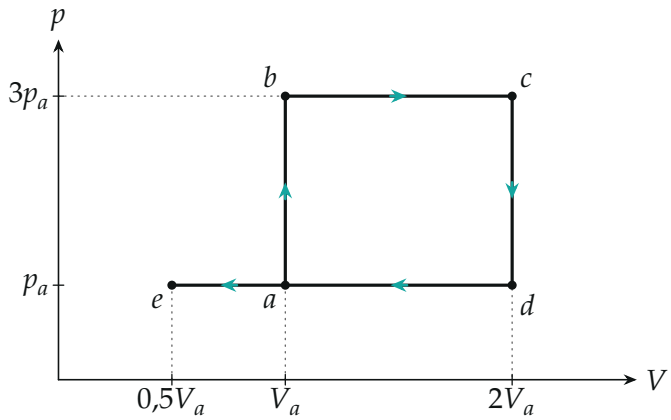
$$p_a V_e = -3 + 4 = 1 \text{ кДж} = \frac{1}{2} p_a V_a,$$

то есть $V_e = 0{,}5V_a$. Проверка теплоты: $Q_{de} = \frac{5}{2} A_{de} = -7{,}5$ кДж — как на графике.

7. График $p(V)$**.** В долях p_a и V_a состояния таковы:

состояние	a	b	c	d	e
p/p_a	1	3	3	1	1
V/V_a	1	1	2	2	0,5
pV, кДж	2	6	12	4	1

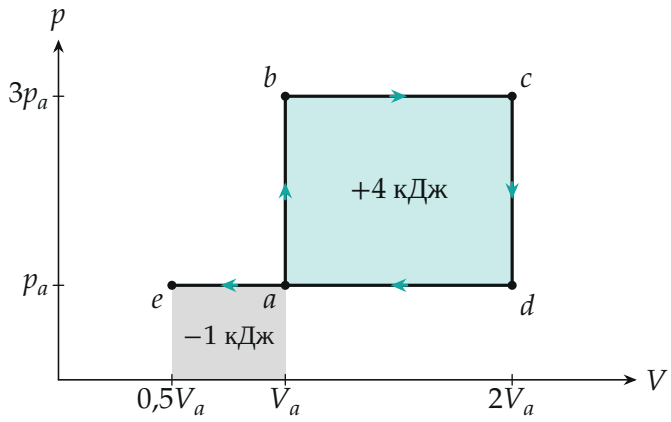
Последовательно соединим точки: a–b — вертикальный отрезок вверх, b–c — горизонтальный вправо, c–d — вертикальный вниз, d–e — горизонтальный влево до объёма $0{,}5V_a$.



Заметим, что при $p_d = p_a$ изобара d–e проходит через состояние a (газ на пути от $V_d = 2V_a$ до $V_e = 0{,}5V_a$ проходит объём V_a). Значит, процесс сначала замыкается в цикл a–b–c–d–a (по часовой стрелке), а потом газ ещё раз проходит из a дальше, в e: процесс «перезамкнут», и e с a не совпадает.

Обратите внимание. Совпадение давления в d с p_a не означает, что процесс замкнулся: для замыкания нужно ещё $V_e = V_a$, а здесь $V_e = 0{,}5V_a$.

Проверка. Первый способ — по состояниям, без графика $A(Q)$. Конечная теплота: $\Delta U_{ae} = \frac{3}{2}(p_eV_e - p_aV_a) = \frac{3}{2}(1-2) = -1{,}5$ кДж; работа за весь процесс $A_{ae} = 0+6+0-3 = 3$ кДж (последняя точка графика); тогда $Q_{ae} = \Delta U + A = -1{,}5 + 3 = 1{,}5$ кДж — ровно координата Q точки e на графике. Второй способ — по площадям на диаграмме p–V: работа цикла $abcd$ — площадь прямоугольника $(3p_a - p_a)(2V_a - V_a) = 2p_aV_a = 4$ кДж (цикл по часовой стрелке, работа положительна), а от a до e газ сжимают при p_a: $-p_a \cdot 0{,}5V_a = -1$ кДж. Итого $4 - 1 = 3$ кДж — то же значение.



Смысл: график $A(Q)$ не показывает давления и объёмы, но по двум числам на каждом участке — приращению работы и приращению теплоты — и единственной величине p_aV_a процесс восстанавливается целиком.

Ответ. $a(p_a; V_a)$, $b(3p_a; V_a)$, $c(3p_a; 2V_a)$, $d(p_a; 2V_a)$, $e(p_a; 0{,}5V_a)$; a–b и c–d — изохоры, b–c и d–e — изобары; изобара d–e проходит через a, процесс не замкнут (он «перезамкнут»).