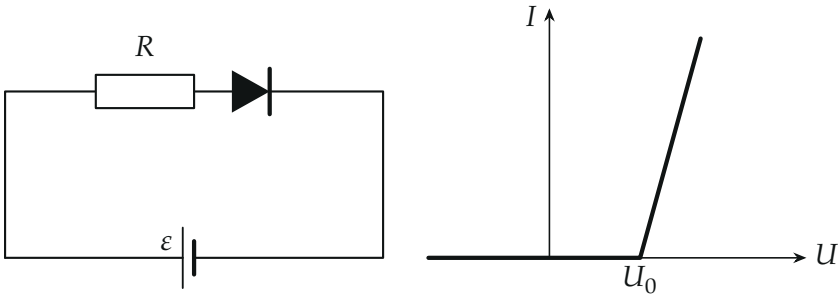
Диод с резистором

Задача 4. [ИОШ 2023/24, 11 класс, задача 4] Вольтамперная характеристика диода (зависимость тока через диод от напряжения на нём) может быть приближённо записана как

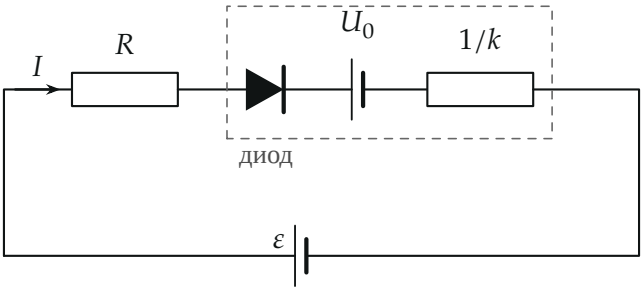
$$I(U) = \begin{cases} 0, & \text{если } U < U_0, \\ k\,(U - U_0), & \text{если } U > U_0, \end{cases}$$

где U_0 и k — известные числа (см. рисунок справа; в направлении, противоположном стрелке в обозначении диода, диод не пропускает электрический ток ни при каком напряжении). Диод подключают к идеальному источнику постоянного напряжения ε через резистор R (см. рисунок слева). Найти мощность, выделяющуюся в цепи, в зависимости от напряжения источника. Будет ли выделяться тепло на диоде, и если да, то какова мощность этого тепловыделения?



▲ **Решение. Что происходит.** Диод — нелинейный элемент: у него два режима, и какой из них включится, зависит от напряжения источника. Класс задачи — диоды, перебор состояний: предполагаем состояние, находим ток и напряжение и проверяем, не противоречит ли результат предположению. Закрытый диод ($U < U_0$) — ток равен нулю. Открытый диод ($U > U_0$) по условию ведёт себя как «пороговая батарейка» U_0 плюс резистор сопротивлением $1/k$ (рисунок): напряжение на нём $U = U_0 + I/k$. Источник идеальный, внутреннего сопротивления нет, и вся его мощность уходит в тепло на резисторе и на диоде.

Обозначения. I — ток в цепи, U — напряжение на диоде (в направлении стрелки диода), $U_R = IR$ — напряжение на резисторе, P — мощность источника (она же мощность, выделяющаяся в цепи), P_R и $P_д$ — мощности на резисторе и на диоде. Контур один, ток по нему течёт одинаковый; направление тока — от плюса источника вперёд по стрелке диода.



Эквивалентная схема открытого диода: идеальный диод (пропускает ток вперёд без напряжения), «порог» U_0 и резистор $1/k$.

Пункт 1. Мощность в цепи.

1. Диод закрыт. Пусть $I = 0$. Тогда напряжение на резисторе $IR = 0$, и второе правило Кирхгофа для контура ($\varepsilon = IR + U$) даёт $U = \varepsilon$ — весь источник приложен к диоду. Предположение «закрыт» согласуется с условием $U < U_0$ только при $\varepsilon \le U_0$. Значит, при $\varepsilon \le U_0$ ток не течёт и мощность в цепи равна нулю: $P = 0$.

2. Диод открыт. Пусть $\varepsilon > U_0$ (при закрытом диоде было бы $U = \varepsilon > U_0$, а там ток не нуль — противоречие, значит, диод открыт). Из ВАХ на втором участке $I = k\,(U - U_0)$, то есть напряжение на диоде

$$U = U_0 + \frac{I}{k}.$$

Запишем закон Ома для замкнутого контура (сумма напряжений на элементах равна ЭДС идеального источника):

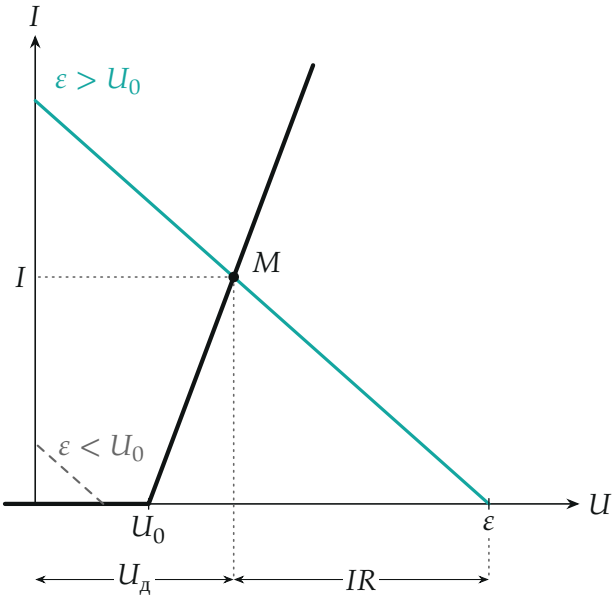
$$\varepsilon = IR + U_0 + \frac{I}{k} \quad \Longrightarrow \quad I = \frac{k\,(\varepsilon - U_0)}{1 + kR}.$$

Ток положителен именно при $\varepsilon > U_0$, как и должно быть для открытого диода.

3. Мощность. Источник идеальный, внутреннего сопротивления нет, и в цепи нет накопителей энергии (конденсаторов, катушек): вся работа источника в единицу времени превращается в тепло. Мощность источника равна работе ЭДС по перемещению зарядов в единицу времени:

$$P = \varepsilon I = \frac{k\,\varepsilon\,(\varepsilon - U_0)}{1 + kR} \qquad (\varepsilon > U_0), \qquad P = 0 \qquad (\varepsilon \le U_0).$$

Второй способ: графически. Пересечение ВАХ диода и «нагрузочной прямой» $I = (\varepsilon - U)/R$ — это то же уравнение контура: ток и напряжение должны лежать и на ВАХ, и на этой прямой. При $\varepsilon < U_0$ прямая пересекает горизонтальную часть ВАХ при $I = 0$, при $\varepsilon > U_0$ — наклонную (точка M). Числа для рисунка: $U_0 = 1$ В, $k = 1$ А/В, $R = 3$ Ом, $\varepsilon = 4$ В; тогда $I = \dfrac{1 \cdot 3}{1 + 3} = 0{,}75$ А, $U = 1 + 0{,}75 = 1{,}75$ В, $IR = 2{,}25$ В, сумма $1{,}75 + 2{,}25 = 4$ В.



Графическое решение при $U_0 = 1$ В, $k = 1$ А/В, $R = 3$ Ом, $\varepsilon = 4$ В: рабо-

чая точка M — пересечение ВАХ и нагрузочной прямой; $U_д$ — напряжение на диоде, IR — на резисторе. Пунктир — нагрузочная прямая при $\varepsilon < U_0$.

Пункт 2. Тепло на диоде.

4. Выделяется ли тепло. Да. При $\varepsilon > U_0$ через диод идёт ток $I > 0$ при ненулевом напряжении $U = U_0 + I/k > 0$, и электрическое поле совершает работу по перемещению зарядов в диоде: мощность $UI > 0$. Эта работа не накапливается (диод не источник и не накопитель) — она переходит в тепло. Обратите внимание: «батарейка U_0» в эквивалентной схеме — лишь способ записать ВАХ; настоящей ЭДС, которая отдавала бы энергию, у диода нет. Закрытый диод тепла не выделяет: $I = 0$.

5. Мощность на диоде, способ первый — напрямую, мощность на участке цепи есть напряжение на нём, умноженное на ток:

$$P_д = UI = \Big(U_0 + \frac{I}{k}\Big)I = \frac{\varepsilon + kRU_0}{1 + kR} \cdot \frac{k\,(\varepsilon - U_0)}{1 + kR} = \frac{k\,(\varepsilon - U_0)\,(\varepsilon + kRU_0)}{(1 + kR)^2}.$$

Здесь использовано $U_0 + \dfrac{I}{k} = U_0 + \dfrac{\varepsilon - U_0}{1 + kR} = \dfrac{\varepsilon + kRU_0}{1 + kR}$.

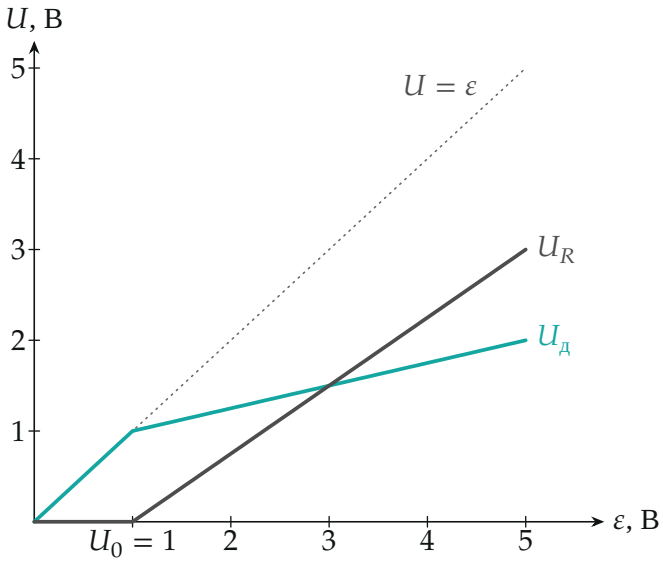
Способ второй — по закону сохранения энергии: вся мощность источника делится между резистором и диодом, $P = P_R + P_д$, где $P_R = I^2R = \dfrac{k^2R\,(\varepsilon - U_0)^2}{(1 + kR)^2}$. Тогда

$$P_д = P - I^2R = \frac{k\,(\varepsilon - U_0)\,[\varepsilon\,(1 + kR) - kR\,(\varepsilon - U_0)]}{(1 + kR)^2} = \frac{k\,(\varepsilon - U_0)\,(\varepsilon + kRU_0)}{(1 + kR)^2}.$$

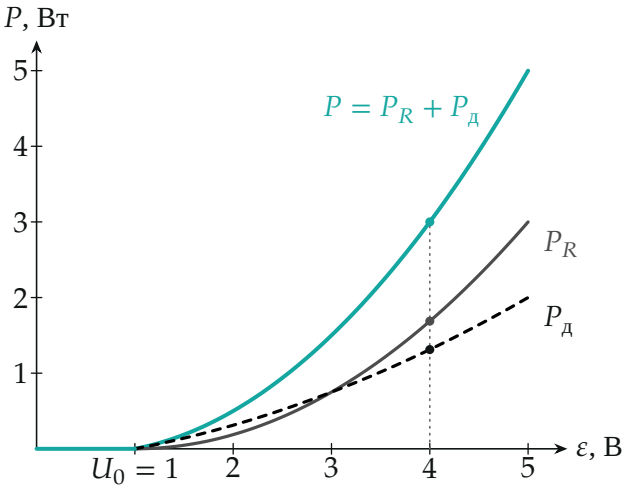
Тот же результат. Для чисел рисунка: $P = 4 \cdot 0{,}75 = 3$ Вт, $P_R = 0{,}75^2 \cdot 3 = 1{,}6875$ Вт, $P_д = 1{,}75 \cdot 0{,}75 = 1{,}3125$ Вт; сумма 3 Вт.

6. Качественная картина. При $\varepsilon \le U_0$ тока нет. Едва ε превысил U_0, ток растёт линейно с запасом: сначала почти всё напряжение остаётся на диоде (он «пороговый»), на резисторе — малая доля. При дальней-

шем росте ε прирост напряжения делится по сопротивлениям $1/k$ и R (рисунок): на диоде $\dfrac{1}{1+kR}$, на резисторе $\dfrac{kR}{1+kR}$ всего прироста.

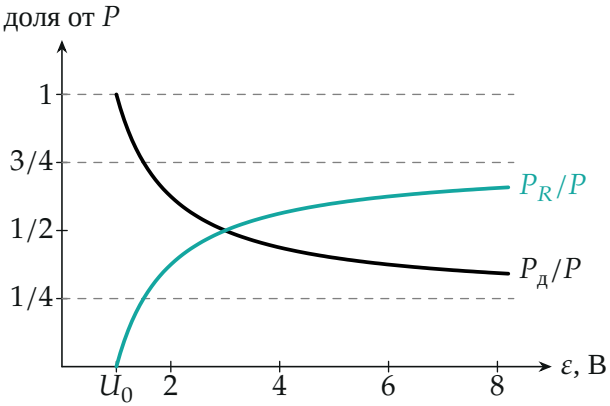


Как ε делится между диодом и резистором (те же числа): до порога всё напряжение на диоде, потом на диоде растёт $1/4$, на резисторе $3/4$ прироста.



Мощности в зависимости от ε: $P = P_R + P_д$; точки — $\varepsilon = 4$ В (3, 1,69 и 1,31 Вт).

Проверка. Размерность: k — ток на напряжение, то есть $1/\text{Ом}$, и kR безразмерно; $k\varepsilon^2$ имеет размерность $\text{А}/\text{В} \cdot \text{В}^2 = \text{Вт}$. Пределы: при $\varepsilon \to U_0$ получаем $P \to 0$ и $P_д \to 0$ — ток исчезает; при $\varepsilon \gg U_0$ порог U_0 несуществен, и цепь — два последовательных резистора R и $1/k$: $P \to \varepsilon^2/(R + 1/k) = k\varepsilon^2/(1 + kR)$ — совпадает с формулой пункта 3, а $P_д/P_R \to (1/k)/R = 1/(kR)$ — как у двух последовательных резисторов. Вторая проверка: у самого порога греется почти один диод, $P_д/P = (\varepsilon + kRU_0)/[(1 + kR)\,\varepsilon] \to 1$ при $\varepsilon \to U_0$ (рисунок).



Доли мощности: диод получает всю мощность у порога и $1/(1 + kR) = 1/4$ при больших ε.

Смысл: диод работает как «порог» U_0 с дополнительным сопротивлением $1/k$: порог бесполезно тратит энергию, поэтому на диоде всегда выделяется тепло, а доля мощности, уходящая в резистор, растёт с ε от нуля до $kR/(1 + kR)$.

Ответ. 1) при $\varepsilon \le U_0$ ток не течёт и $P = 0$; при $\varepsilon > U_0$ $P = \dfrac{k\varepsilon(\varepsilon - U_0)}{1 + kR}$. 2) при $\varepsilon > U_0$ на диоде выделяется тепло мощностью $P_д = \dfrac{k(\varepsilon - U_0)(\varepsilon + kRU_0)}{(1 + kR)^2} > 0$; при $\varepsilon \le U_0$ тепла нет.